LISTA 4 - CÁLCULO 3, 2016.1
TURMAS T1 E T6 (PROF RICARDO)

Atualizado em: May 22, 2016.
É útil fazer uma figura para enxergar melhor as curvas, superfícies e sólidos em cada questão.
Caso encontre erros, favor escrever para ricardo@dmat.ufpe.br.

Rotacional, Divergente e Gradiente:

Exercício 1. Determine o rotacional e o divergente do campo:
a) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x})$
b) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \frac{C}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x,y,z)$
c) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \frac{C}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}(x,y,z)$
d) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \frac{2I}{c(x^2+y^2)}(-y,x,0)$

Exercício 2. Um campo $\overrightarrow{F}$ é um *potencial vetorial* de $\overrightarrow{G}$ se $\overrightarrow{G} = \nabla \times \overrightarrow{F}$.
Determine se existe ou não um potencial vetorial para o campo em cada item e, se existir, exiba um potencial vetorial.
a) $\overrightarrow{G}(x,y,z) = (2x, -y, -z)$
b) $\overrightarrow{G}(x,y,z) = (x \operatorname{sen} y, \cos y, z - xy)$
c) $\overrightarrow{G}(x,y,z) = (xyz, -y^2 z, yz^2)$
d) $\overrightarrow{G}(x,y,z) = (-\operatorname{sen} x, y\cos x - y^2, 2yz)$

Exercício 3. O *operador de Laplace* (ou *Laplaciano*) de uma função escalar $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é definido por:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}$$

a) Verifique que $\Delta f = \nabla \cdot \nabla f$ (o Laplaciano é o divergente do gradiente de f)
Uma função $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é dita *hârmonica* se $\Delta f = 0$. Verifique nos itens abaixos se as funções são harmônicas:
b) $f(x,y,z) = ax + by + cz + d$
c) $f(x,y,z) = x^3 y + y^3 z + z^3 x$
d) $f(x,y,z) = \frac{C}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Teorema de Stokes:

Exercício 4. Sejam $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (y, 2z, 3x)$ e S o hemisfério $x^2+y^2+z^2 = 1$, $z \geq 0$, orientado com a normal apontando para fora da esfera.
a) Dê uma parametrização de S e faça um esboço mostrando o vetor normal de S a orientação positiva da fronteira ∂S.
b) Calcule $\iint\limits_S \operatorname{rot} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S}$ pelo cálculo direto.
c) Calcule $\iint\limits_S \operatorname{rot} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S}$ usando o Teorema de Stokes.

Exercício 5. Sejam $\overrightarrow{F}(y,z,x) = (y, 2z, 3x)$ e S pedaço do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ delimitado pelos planos $z = x + 3$ e $z = 0$, orientado com a normal exterior.

a) Dê uma parametrização de S e faça um esboço mostrando o vetor normal de S a orientação positiva da fronteira ∂S.

b) Calcule $\iint\limits_S \text{rot}\,\overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S}$ pelo cálculo direto.

c) Calcule $\iint\limits_S \text{rot}\,\overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S}$ usando o Teorema de Stokes.

Exercício 6. Calcule $\iint\limits_S \text{rot}\,\overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S}$, onde $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x^2y^3, \text{sen}(xyz), xyz)$ e S é o pedaço da superfície cônica $y^2 = x^2 + z^2$ que está entre os planos $y = 0$ e $y = 3$, orientada na direção positiva do eixo y.

Exercício 7. Seja S a porção do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ compreendida entre os planos $z = 1$ e $z = 2$, orientada com a normal apontando para baixo.

a) Esboce S indicando a orientação positiva de ∂S.

b) Calcule o fluxo do rotacional de $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (3y(z-1), x + e^{\cos z}, z)$ através de S.

Exercício 8. Considere o campo $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (3y+z, x+4z, 2x+y)$. Seja C a curva dada pela interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ com o plano $y + z = 1$, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima. Calcule $\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$.

Exercício 9. Sejam $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (z^2 - y^2, -2xy^2, e^{\sqrt{z}}\cos z)$ e C a curva parametrizada por $\overrightarrow{r}(t) = (\cos t, \text{sen}\, t, 8 - \cos^2 t - \text{sen}\, t)$, $0 \le t \le 2\pi$. Calcule $\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$.

Exercício 10. Sejam $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x^2, y^2e^{z^2} - x^2 + 2yz, 1 - 2yz - y^2e^{z^2})$ e C a fronteira da superfície $S : x + y + z = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, orientada no sentido horário quando vista desde a origem do sistema de coordenadas. Calcule o trabalho realizado por $\overrightarrow{F}$ ao longo da curva C.

Exercício 11. Usando o Teorema de Stokes, transforme a integral $\iint_S \text{rot}\,\overrightarrow{F} d\overrightarrow{S}$ numa integral de linha e calcule-a.

a) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (y, 0, 0)$ e $S : x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $x^2 + y^2 \le 1$, $z \ge 0$, orientada pela normal com componente $z \ge 0$.

b) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (-y, x, x^2)$ e $S : x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $\sqrt{2} \le z \le \sqrt{3}$, $y \ge 0$, orientada pela normal com componente $z \ge 0$.

Exercício 12. Sejam $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (y, 0, x+y)$ e S o gráfico de $f(x,y) = 2 - x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 \le 1$, orientado com a normal $\overrightarrow{n}$ apontando para cima.

a) Calcule $\iint_S \text{rot}\,\overrightarrow{F} d\overrightarrow{S}$ fazendo o cálculo direto.

b) Calcule $\iint_S \text{rot}\,\overrightarrow{F} d\overrightarrow{S}$ usando o Teorema de Stokes.

Exercício 13. Sejam $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (-\text{sen}\, z \cos z - (4 + \sqrt{2})y, 3 + \ln(y^6 + 1), 2y\cos^2 z)$ e S a porção do parabolóide P de equação $z = x^2 + y^2$ que fica abaixo do plano $\pi : 4x + 4y - z + 3 = 0$. Calcule o fluxo do rotacional de F através de S orientada para cima.

Teorema da Divergência:

Exercício 14. Seja Ω o sólido delimitado pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ e pelo plano Oxy, com a fronteira orientada para fora. Calcule o fluxo de $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x^2 + z, 0, z + 1)$ através de S.

Exercício 15. Sejam $S_1 : z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le z \le 2\sqrt{2}$, $S_2 : x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $8 \le x^2 + y^2 \le 16$, $z \ge 0$ e $S = S_1 = \cup S_2$. Calcule o fluxo de $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (y^2x, z^2y + x, x^2z - 5)$ através de S na direção da normal exterior a S.

Exercício 16. Removido da lista.

Exercício 17. Removido da lista.

Exercício 18. Seja Ω o sólido do primeiro octante, limitado pelos planos $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$, pelo cilindro $y = x^2$ e pelo parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$, com $(0, 0, 0)$ contido em Ω.

a) Esboce o sólido Ω.

b) Determine o fluxo de $\overrightarrow{F}$ para fora de S.

Exercício 19. Sejam S a superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ e

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = (xy^2, xyz, z - y^2 z - \frac{1}{2}xz^2)$$

Calcule o fluxo de $\overrightarrow{F}$ através de $\overrightarrow{F}$ na direção da normal apontando para cima.

Exercício 20. Calcule $\iint\limits_S \operatorname{rot} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{S}$, onde $\overrightarrow{F} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}(-y, x, z^2)$ e S é superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ orientada com a normal apontando para fora.

Exercício 21. Calcule o fluxo do campo vetorial

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = (z^2 x, \frac{1}{3}y^3 + \operatorname{tg} z, x^2 z + y^2)$$

através do hemisfério superior da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ orientado para cima.

Sugestão: Considere um disco S_1 de modo que $S \cup S_1$ forma uma superfície fechada para a qual podemos aplicar o Teorema da Divergência.

Exercício 22. Calcule o fluxo do campo vetorial

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = (ye^{z^2}, y^2, e^{xy})$$

através da fronteira S do sólido delimitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 9$ e pelos planos $z = 0$, $z = y - 3$, orientada para fora.

Exercício 23. Calcule o fluxo do campo vetorial

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = (e^x \operatorname{sen} y, e^x \cos y, yz^2)$$

para fora da superfície S da caixa delimitada pelos planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ e $z = 2$.

Exercício 24. Calcule o fluxo do campo vetorial

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = 2\frac{(x-1, y-1, z-1)}{||(x-1, y-1, z-1)||^3} + 3\frac{(x, y+1, z-2)}{||(x, y+1, z-2)||^3}$$

através da superfície esférica de centro $(2, 0, 2)$ e raio 100.

Exercício 25. Calcule o fluxo do campo vetorial

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = (\cos z + xy^2, xe^{-z}, \operatorname{sen} y + x^2 z)$$

para fora da superfície S do sólido limitado pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e pelo plano $z = 4$.