Medida e Integração Lista 4 (2017.2)

Prof. Ricardo Bortolotti

Teorema da Dualidade de Riesz, Medida produto, Teoremas de Tonelli e Fubini (capítulos 8, 9 e 10)

1. Exercício 8.T do Bartle.

2. Exercício 8.U do Bartle.

3. Exercícios 10.C, 10.D, 10.E do Bartle.

4. Exercícios 10.N e 10.O do Bartle.

5. Exercício 10.P do Bartle.

6. (Exercício 50, Capítulo 2, Folland) Considerando (X, Σ, μ) um espaço de medida σ-finita e $f : X \to \mathbb{R}$ integrável não-negativa, seja

$$G_f = \{(x, y) \in X \times [0, +\infty), y \leq f(x)\}.$$

   Então G_f é $\Sigma \times \mathcal{B}$-mensurável e $\mu \times m(G_f) = \int f d\mu$. (aonde m é a medida de Lebesgue e $\mathcal{B}$ a σ-álgebra de Borel em $[0, +\infty)$.)

   Sugestão: Para mostrar que G_f é mensurável, note que $(x, y) \to f(x) - y$ é a composição dos mapas $(x, y) \to (f(x), y)$ com $(x, y) \to x - y$.

   Obs: Esse exercício verifica que "a integral de uma função é a área debaixo do gráfico", pois G_f é o conjunto delimitado pelo eixo x e pelo gráfico de f.

7. (Exercício 12, Capítulo 3, Folland) Para $j = 1, 2$, sejam μ_j, ν_j medidas σ-finitas em (X_j, Σ_j) tais que $\nu_j \ll \mu_j$. Então $\nu_1 \times \nu_2 \ll \mu_1 \times \mu_2$ e

$$\frac{d(\nu_1 \times \nu_2)}{d(\mu_1 \times \mu_2)}(x_1, x_2) = \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x_1) \times \frac{d\nu_2}{d\mu_2}(x_2).$$