

Sistemas Dinâmicos Lista 4 (2017.2)
Prof. Ricardo Bortolotti

Elementos de Dinâmica Hiperbólica

Se nada for dito, $f : M \rightarrow M$ é um difeomorfismo de classe C^r , $r \geq 1$, M é uma variedade Riemanniana compacta.

1. Exercício 7.20 do Robinson.
2. Exercício 7.41 do Robinson.
3. Seja Λ um conjunto hiperbólico transitivo tal que $E_x^u = 0$ para todo $x \in \Lambda$. Prove que Λ é uma órbita periódica.
4. Se $L(f)$ é hiperbólico, então $W^s(x)$ e $W^u(x)$ são variedades C^r imersas em M para todo $x \in M$.
5. Seja Λ um conjunto hiperbólico com decomposição $E^s \oplus E^u$. Seja $F^s \oplus F^u$ outra decomposição hiperbólica, mostre que $E^s = F^s$ e $E^u = F^u$.
6. Seja Λ um conjunto hiperbólico isolado. Definimos $W^s(\Lambda) = \{x \in M, d(f^n(x), \Lambda) \rightarrow 0\}$. Utilize o Lema de Sombreamento para provar que

$$W^s(\Lambda) = \bigcup_{x \in \Lambda} W^s(x).$$

7. Dê um exemplo de um conjunto hiperbólico que não possui estrutura de produto local.
Sugestão: Exiba tal exemplo para o deslocamento completo de 2 símbolos.
8. Existe um conjunto hiperbólico Λ tal que os pontos periódicos de $f|_\Lambda$ não são densos nele?
9. Sejam p_1, \dots, p_k pontos periódicos hiperbólicos e $x \in W^s(p_1) \cap W^u(p_k)$. Se $W^u(p_i)$ intersecta transversalmente $W^s(p_{i+1})$ para $i = 1, 2, \dots, k-1$, então $x \in \Omega(f)$.
10. (a) Mostre que $Per(f) \subset L(f) \subset \Omega(f) \subset R(f)$.
(b) Mostre que $R(f)$ é fechado e invariante.
(c) Mostre que se $R(f)$ é hiperbólico, então $\overline{Per(f)} = R(f)$.
(d) Mostre que se Λ é hiperbólico isolado então $\overline{Per(f|_\Lambda)} = \Omega(f|_\Lambda) = R(f|_\Lambda)$.
11. Seja $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $L(x, y) = (2x, y/2)$. Tome uma função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável que vale 0 em $(-\infty, 1]$, $h'(x) > 0$ para $x \in (1, 3)$ e $h(2) > 2$. Considere o mapa

$$g(x, y) = (x - h(x + y), y + h(x + y)).$$

Existe interseção homoclínica entre $W^s(0)$ e $W^u(0)$ do mapa $f = g \circ L$? Transversal? Caso exista, desenhe mais pedaços das variedades invariantes (podem aparecer surpresas).