Medida e Integração   Lista 5 (2017.2)

Prof. Ricardo Bortolotti

Mudança de variáveis para a integral de Lebesgue no $\mathbb{R}^n$. Teorema da Diferencição de Lebesgue, funções absolutamente contínuas e de variação limitada. (seções 2.6, 2.7, 3.4, 3.5 no Folland, capítulo 7 no Rudin)

1. Se f é integrável em $(0,a)$ e $g(x) = \int_x^a t^{-1} f(t)dt$, então g é integrável em $(0,a)$ e
$$\int_0^a g(t)dt = \int_0^a f(t)dt.$$

2. Dado $s > 0$, integrando $e^{-sxy} \sin x$ com respeito a x e a y, mostre que
$$\int_0^\infty e^{-sx} x^{-1} \sin x dx = \arctan(1/s).$$

3. Se $f \in L^1_{loc}$ e f é contínua em x, então x é um ponto de Lebesgue de f.

4. Se $f \in L^1$, então $|f(x)| \leq Hf(x)$ para todo ponto de Lebesgue x de f.

5. Dada $f \in L^1$, $f \neq 0$, existem $C, R > 0$ tais que
$$Hf(x) \geq C|x|^{-n} \text{ para } |x| > R.$$
Conclua que $m(\{x \in \mathbb{R}^n, Hf(x) > \alpha\}) \geq \frac{C'}{\alpha}$ quando α é pequeno.
Obs: Esse fato implica que a desigualdade de Hardy-Littlewood é essencialmente a melhor que pode se esperar.

6. Se f e Mf estão em $L^1(\mathbb{R}^n)$, então $f(x) = 0$ para quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^n$.

7. Se F e G são absolutamente contínuas em $[a,b]$, então FG também é. Além disso,
$$\int_a^b FG' + F'G = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

8. Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Então existe $M > 0$ tal que $|F(x) - F(y)| \leq |x - y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ (isto é, M é uma constante de Lipschitz de F) se, e somente se, F é absolutamente contínua e $|F'| \leq M$ em qtp.

9. Dê um exemplo de uma medida μ tal que $\operatorname{supp} \mu = \mathbb{R}$ e μ e m são mutuamente singulares (m é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$).

10. Sejam μ uma medida de Borel em $\mathbb{R}$ e $\phi : [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ de classe C^1, estritamente crescente tal que $\phi(0) = 0$ e $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = +\infty$. Para toda f mensurável não-negativa, vale:
$$\int_{\mathbb{R}} \phi(f(x)) d\mu(x) = \int_0^\infty \mu(\{x, f(x) > t\}) \cdot \phi'(t)dt.$$