LISTA 5 - CÁLCULO 3, 2016.1
TURMAS T1 E T6 (PROF RICARDO)

Atualizado em: June 22, 2016.
Caso encontre erros, favor escrever para ricardo@dmat.ufpe.br.

1) Resolver os exercícios que foram escritos no quadro durante as aulas.

2) Resolver os exercícios do texto que está na xerox.

3) Sugestão de exercícios do Stewart (volume 2, 7a edição):
11.1: 34, 47, 50, 79-81, 83, 91
11.2: 64
11.3: 21-24
11.4: 6, 11, 21, 27-32
11.5: 3, 7, 11, 17
11.6: 3, 10, 13, 19, 21, 23
11.7: 4, 9, 15, 19, 25, 33, 35, 36
11.8: 5, 7, 12, 15, 23
11.9: 5, 8, 13
11.10: 3, 5-10, 55-57, 63-70

Revisão: (ainda no livro do Stewart)
Verificação de conceitos: 2-6, 8, 9, 11
Quiz Verdadeiro-Falso: 1, 2, 4, 8, 11
Exercícios: 1, 7, 8, 13-15, 18, 30, 40-43

(Extra) O número π como limite de sequências:

Exercício 1. Mostre que para todo inteiro $n \geq 1$ tem-se:

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-2} x dx$, para todo $n \geq 2$

(Dica: Use integração por partes com $u = \operatorname{sen}^{n-1} x$ *e* $v' = \operatorname{sen} x$*)*

b) $\displaystyle\frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1} x dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n} x dx} \leq 1$

c) $\displaystyle\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1} x dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n} x dx} = \frac{(2n)^2}{(2n+1)(2n-1)} \cdot \frac{(2n-2)^2}{(2n-1)(2n-3)} \cdots \frac{2^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{2}{\pi}$

d) Obtenha o **Produto de Wallis**:

$$\boxed{\frac{\pi}{2} = \frac{2^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4^2}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6^2}{5 \cdot 7} \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}}$$

Exercício 2.

a) Fixado qualquer $x \neq 0$, considere a sequência

$$a_n = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cdots \cos\left(\frac{x}{2^n}\right),\ n \geq 1$$

Verifique que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{senx}{x}$

(Dica: Use que $\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 4 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{4}\right) = \cdots$*)*

b) Tomando $x = \frac{\pi}{2}$ e usando a relação trigonométrica $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{2 + 2\cos x}}{2}$, obtenha a **Fórmula de Viète**:

$$\boxed{\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots}$$

Exercício 3.

a) Determine a série de Taylor da função $\frac{1}{1+x^2}$ em torno do 0 e o raio de convergência desta série.

b) Determine a série de Taylor da função $\operatorname{arctg} x$ em torno do 0 e o raio de convergência desta série.

c) Definindo $p_n(x)$ o n-ésimo polinômio de Taylor da função $\operatorname{arctg} x$ e o resto $r_n(x) = \operatorname{arctg} x - p_n(x)$, verifique que $\lim_{n\to\infty} r_n(1) = 0$.

d) Obtenha a **Fórmula de Leibniz**:

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}}$$

Exercício 4.

a) Determine a série de Taylor das funções e^x, $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ em torno de $x = 0$.

b) Sabendo que $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$ é válida também para todo número complexo z, obtenha a **Fórmula de Euler**:

$$\boxed{e^{i\theta} = \operatorname{sen}\theta + i\cos\theta}$$

(Dica: Substitua $z = i\theta$ na série de Taylor da exponencial, lembre-se de que as potências de i se alternam com período 4 entre $1, i, -1, -i$. Veja que a parte real de $e^{i\theta}$ corresponde à função seno e a parte imaginária à função cosseno)

c) Tomando $\theta = \pi$, obtenha a **Identidade de Euler**:

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

Esta é considerada por muitos a identidade mais bela de toda a Matemática.