

Análise no \mathbb{R}^n - Lista 6 (2021.2)
Prof. Ricardo Bortolotti

Os exercícios do livro correspondem ao livro Análise Real, volume 2 - Elon Lages Lima (3ª edição).

Capítulo 6: Aplicações Inversas e Implícitas

1. Exercícios 1 e 2 da Seção 1.
2. Exercícios 1, 2 e 4 da Seção 2.
3. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 para a qual existe $\alpha > 0$ tal que para todos $x, v \in \mathbb{R}^n$ tem-se $\langle f'(x) \cdot v, v \rangle \geq \alpha \|v\|^2$.
 - a) Prove que $\|f(x) - f(y)\| \geq \alpha \|x - y\|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$.
 - b) Prove que a imagem $f(\mathbb{R}^n)$ é aberta.
 - c) Prove que a imagem $f(\mathbb{R}^n)$ é fechada.
 - d) Conclua que f é difeomorfismo de \mathbb{R}^n sobre si mesmo.
4. Se $f : U \subset \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é de classe C^1 e tem posto 3 em todos os pontos do aberto U , então $\|f(x)\|$ não assume valor máximo para $x \in U$.
5. Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 no aberto U . Se os pontos críticos de f (pontos onde o determinante jacobiano de f se anula) são pontos isolados e $m > 1$, então f é uma aplicação aberta (isto é, a imagem de todo aberto é um aberto). Deduza daí uma demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra.