Análise no $\mathbb{R}^n$ - Lista 9 (2021.2)

Prof. Ricardo Bortolotti

Os exercícios do livro correspondem ao livro Análise Real, volume 2 - Elon Lages Lima ($3^{\underline{a}}$ edição).

Capítulo 9: Mudança de Variáveis

1. Exercícios 1 e 2 do Capítulo.

2. Considere $g : \mathbb{R}^2 - (0,0) \to \mathbb{R}^2 \to (0,0)$ dada por $g(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Prove que g é um difeomorfismo local de classe C^∞ e determine $|\det Dg|$.

   Justifique a mudança de coordenadas para coordenadas polares: "$(x,y) = g(r,\theta) \Rightarrow dxdy = rdrd\theta$".

3. Usando o item acima, calcule
$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy$$
   e depois calcule
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

4. Considere $g : (0,+\infty) \times (0,\pi) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^3 \to (0,0)$ dada por
$$g(\rho,\phi,\theta) = (\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi).$$
   Prove que g é um difeomorfismo de classe C^∞ sobre a imagem e determine $|\det Dg|$. Prove que a imagem é o $\mathbb{R}^3$ menos um conjunto de medida nula.

   Justifique a mudança de coordenadas para coordenadas esféricas: "$(x,y,z) = g(\rho,\phi,\theta) \Rightarrow dxdydz = \rho^2 \sin\phi d r d\phi d\theta$".

5. Seja $V_m(r)$ o volume da bola de centro na origem e raio r em $\mathbb{R}^m$. Prove que se tem a relação indutiva
$$V_{n+1}(r) = 2V_n(1)\int_0^r (r^2 - t^2)^{m/2} dt$$
   e conclua daí que
$$V_m(r) = \frac{r^m \pi^{m/2}}{(\frac{m}{2})!} \quad \text{quando } m \text{ é par}$$
   e
$$V_m(r) = \frac{r^m \pi^{(m-1)/2} 2^m (\frac{m-1}{2})!}{m!} \quad \text{quando } m \text{ é ímpar.}$$
   Observe que destas fórmulas resulta um fato curioso:
$$\lim_{m\to\infty} V_m(r) = 0.$$