

# Problemas de Cálculo na OBM-U

Ricardo T. Bortolotti

July 31, 2017

## 1 Sequências e Séries

**Problema 1** (OBM-U 2016 - Problema 1, 2a fase). *Seja  $\{a_n\}$  uma sequência de número reais tal que  $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n}$  converge. Prove que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = 0.$$

*Idéia: Um truque interessante para esse problema é utilizar a fórmula de soma por partes:*

$$\sum_{k=m}^n a_k(b_{k+1} - b_k) = [a_n b_n - a_m b_m] - \sum_{k=m}^n (a_{k+1} - a_k) b_{k+1}.$$

Inspirados na analogia da fórmula acima com a integração por partes, formulamos um enunciado análogo para funções:

**Problema Relacionado.** *Seja  $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável tal que a integral imprópria  $\int_1^\infty \frac{f(x)}{x} dx$  é convergente. Prove que*

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y} \int_1^y f(x) dx = 0.$$

### 1.1 Convergência de séries

**Problema 2** (OBM-U 2002 - Problema 5, 2a fase). *Dados  $x \in \mathbb{R}$ , definimos  $\ln_0(x) = x$  e, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , se  $\ln_k(x) > 0$ , definimos  $\ln_{k+1}(x) = \ln(\ln_k(x))$ , onde  $\ln$  é o logaritmo natural.*

*Dado  $n$  inteiro positivo, definimos  $k(n)$  como o maior  $k$  tal que  $\ln_k(n) \geq 1$ , e  $a_n = \prod_{j=0}^{k(n)} \ln_j(x) = n \ln n (\ln \ln n) \cdots \ln_{k(n)}(n)$ .*

*Diga se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$  converge ou diverge.*

*Idéia: Nos cursos de Cálculo, é explicado como usar o teste da integral para verificar que as séries  $\sum \frac{1}{n \ln n}$ ,  $\sum \frac{1}{n \ln n \ln \ln n}$ ,  $\sum \frac{1}{n \ln n \ln \ln n \ln \ln \ln n}$ ,  $\cdots$  são divergentes. Adapte essa idéia.*

Curiosamente, o mesmo problema veio a aparecer na Putnam de 2008.

**Problema Relacionado** (Putnam 2008 - Problema A4). Defina  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por  $f(x) = x$  se  $x \leq e$  e  $f(x) = xf(\ln x)$  se  $x > e$ . Determine se a série  $\sum \frac{1}{f(n)}$  é convergente ou divergente.

Para os próximos 2 problemas, a solução passa por comparar as séries com outra do tipo  $\sum \frac{1}{n^p}$ .

**Problema 3** (OBM-U 2012 - Problema 6, 1a fase). Considere a parábola formada pelos pontos  $(x, x^2)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , e a sequência  $x_n = n^\alpha$ , onde  $\alpha > 0$  é uma constante real. Considere a região formada pelos pontos  $(x, y)$  com  $x > 0$  e que se situam abaixo da parábola e acima das retas tangentes à parábola nos pontos  $(x_n, x_n^2)$ ,  $n \geq 0$ . Para que valores de  $\alpha$  essa região tem área infinita?

*Idéia:* A área descrita corresponde a uma série infinita. A idéia é comparar a série com outra do tipo  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ .

**Problema 4** (OBM-U 2005 - Problema 4, 2a fase). Considere a sequência  $(a_n)$  dada por  $a_1 = 1$  e

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^{2005}}$$

para todo  $n \geq 1$ . Prove que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{na_n}$  converge.

*Idéia:* Tome um inteiro  $k$  para o qual é possível comparar  $a_{n+1}^k = (a_n + \frac{1}{a_n^{2005}})^k$  com  $n$ . Outro interessante problema da OBM-U sobre convergência de séries.

**Problema 5** (OBM-U 2006 - Problema 5, 2a fase). Seja  $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  uma função crescente e bijetora. Prove que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$  converge se, e somente se, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$  converge, sendo  $f^{-1}$  a função inversa de  $f$ .

## 1.2 Sequências recorrentes

Uma recorrência interessante é dada pela relação  $a_{n+1} = a_n^2 - 2$ . Nesse caso, o termo geral é da forma  $a_n = \alpha^{2^n} + \alpha^{-2^n}$  para algum  $\alpha \in \mathbb{C}$  encontrado através do  $a_1$ .

**Problema 6** (OBMU 2003 - Problema 6, 1a fase). Defina  $a_1 = 3$  e  $a_{n+1} = a_n^2 - 2$ . Prove que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln a_n}{n} = \ln 2$  e calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln \ln a_n - n \ln 2)$ .

Essa recorrência já esteve presente em um problema da Putnam e em outro da IMC.

**Problema Relacionado** (Putnam 2014 - Problema A3). Sejam  $a_0 = \frac{5}{2}$  e  $a_{k+1} = a_k^2 - 2$  para todo  $k \geq 1$ . Calcule

$$\prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{a_k}\right).$$

**Problema Relacionado** (IMC-2010). Defina a sequência  $x_1, x_2, \dots$  por  $x_1 = \sqrt{5}$  e  $x_{n+1} = x_n^2 - 2$  para cada  $n \geq 1$ . Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{x_{n+1}}.$$

### 1.3 Séries de Potências

Uma maneira de se calcular o valor explícito de uma série é através de série de potências quando sabemos qual função a série representa.

**Problema 7** (OBM-U 2004 - Problema 6, 1a fase). *Calcule*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)(3k+3)}.$$

*Idéia: Considere  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k+3}}{(3k+1)(3k+2)(3k+3)}$  e derive três vezes.*

**Problema Relacionado** (IMC-2010). *Calcule*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4)}.$$

Outro tipo de problema no qual é pedido o valor de uma série e as séries de potência vêm em nosso auxílio:

**Problema 8** (OBM-U 2009 - Problema 6, 1a fase). *Considere a sequência  $a_0, a_1, \dots$  definida por  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = \frac{\pi}{3}$  e, para  $n \geq 1$ ,*

$$a_{n+1} = \frac{\pi(a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \dots + a_n a_0)}{3(n+1)}$$

*Calcule*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{2^k} = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} + \frac{a_3}{8} + \dots$$

*Idéia: Considere  $f(x) = \sum a_n x^n$  e olhe para  $f(x)^2$ .*

**Problema Relacionado** (IMC-2003). *Considere a sequência  $\{a_n\}$  definida por  $a_0 = 1$  e*

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{n-k+2}.$$

*Calcule*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}.$$

## 2 Derivadas

**Problema 9** (OBM-U 2006 - Problema 3, 1a fase). Dada  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$  duas vezes diferenciável com  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$  e  $1 + f(x) = \frac{1}{f''(x)}$  para todo  $x \in [0, 1]$ , mostre que  $f(1) < \frac{3}{2}$ .

**Problema 10** (OBM-U 2008 - Problema 1, 2a fase). Seja  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f_n(x) = \frac{x^{2008}}{2008} + x^2 - nx$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , e seja  $m_n$  o valor mínimo assumido por  $f_n$ . Determine  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que o limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n}{n^\alpha}$  existe e é não-nulo, e calcule esse limite (para esse valor de  $\alpha$ ).

**Problema 11** (OBMU-2012 - Problema 5, 2a fase). Seja  $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  uma função duas vezes derivável satisfazendo  $f'(x) < 0$  para todo  $x > 0$ . Para cada  $x > 0$  considere o triângulo cujos lados são a reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(x, f(x))$  e os dois eixos coordenados. Sabemos que a área deste triângulo é igual a  $C$  (constante e independente de  $x$ ).

Determine os possíveis valores de  $f(1)$ .

**Problema 12** (OBM-U 2016 - Problema 6, 2a fase). Dados  $C, D > 0$ , dizemos que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é bonita se  $f$  é de classe  $C^2$ ,  $|x^3 f(x)| \leq C$  e  $|xf''(x)| \leq D$  para todo  $x$  com  $|x| \geq 1$ .

a) Prove que se  $f$  é uma função bonita então, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $x_0 > 0$  tal que, para  $|x| \geq x_0$ ,  $|x^2 f'(x)| < \sqrt{2CD} + \epsilon$ .

b) Prove que, se  $0 < E < \sqrt{2CD}$ , então existe uma função bonita  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que, para todo  $x_0 > 0$ , existe  $x > x_0$  com  $|x^2 f'(x)| > E$ .

### 2.1 Teorema do Valor Médio e Teorema do Valor Intermediário

**Problema 13** (OBM-U 2009 - Problema 1, 2a fase). Seja  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  crescente, derivável e inversível.

Se  $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f^{-1}(x)dx$ , prove que existem dois reais diferentes  $a$  e  $b$ ,  $0 \leq a < b \leq 1$ , tais que  $f'(a) = f'(b) = 1$ .

**Problema 14** (OBM-U 2007 - Problema 1, 2a fase). Considere a função  $f$  de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  dada por  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , com  $a, b, c \in \mathbb{R}$  e  $ac < 0$ . Prove que, para todo inteiro positivo  $n$ , a equação  $f(f(\dots(f(x)))) = 0$  tem pelo menos uma solução real (aonde  $f$  é composta  $n$  vezes com ela mesma).

### 3 Integrais

**Problema 15** (OBM-U 2010 - Problema 1, 2a fase). *Calcule:*

$$\int_0^{\pi/4} \frac{x}{(\sin x + \cos x) \cos x} dx.$$

**Problema 16** (OBM-U 2001 - Problema 5, 2a fase). *Para todo  $u \in \mathbb{R}$ , seja*

$$I(u) = \int_0^\pi \ln(1 - 2u \cos x + u^2) dx.$$

- a) *Prove que  $I(u) = I(-u) = \frac{1}{2}I(u^2)$ .*  
b) *Calcule  $I(u)$  para todo  $u \in \mathbb{R}$ .*

**Problema 17** (OBM-U 2005 - Problema 5, 2a fase). *Prove que:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = \int_0^1 x^{-x} dx.$$

#### 3.1 Simetria

Uma idéia particularmente interessante é fazer a mudança de variáveis  $u = -x$ , esta é especialmente útil quando não sabemos integral  $f(x)$  mas sabemos integrar  $f(x) + f(-x)$ . Utilizando essa idéia, calcule as seguintes integrais.

**Problema 18** (OBM-U 2006 - Problema 1, 1a fase). *Calcule a integral:*  $\int_{-1}^1 \frac{e^x - x - 1}{(e^x - 1)x} dx$ .

**Problema 19** (OBM-U 2005 - Problema 2, 1a fase). *Calcule:*  $\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \operatorname{tg} x) dx$ .

**Problema 20** (OBM-U 2002 - Problema 3, 1a fase). *Calcule*  $\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x - 1}{\sqrt{x^2 + 1} + x + 1} dx$ .

**Problema 21** (OBM-U 2004 - Problema 2, 1a fase). *Calcule*  $\int_{-1}^1 \frac{x^{2004}}{1 + e^x} dx$ .

**Problema Relacionado** (Putnam 2005 - A5). *Calcule*  $\int_0^1 \frac{\ln(x + 1)}{x^2 + 1} dx$ .

**Problema Relacionado** (IMC-1996). *Calcule a integral*  $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nx)}{(1 + 2^x) \sin x} dx$ .