MAIS PROBLEMAS DE DIVISIBILIDADE, CONGRUÊNCIAS, TEOREMA DE EULER-FERMAT

Problema 1 (Irlanda 1997)**.** *Mostre que qualquer subconjunto* $A \subset \{1, 2, \cdots, 2n-1\}$ *com* n *elementos contém uma potência de* 2 *ou dois elementos cuja soma é uma potência de* 2*.*

Problema 2 (São Petesburgo 1996)**.** *Determine todos os inteiros* n *tais que* $3^{n-1} + 5^{n-1}$ *divide* $3^n + 5^n$*.*

Problema 3 (Putnam 2000)**.** *Prove que*

$$\frac{\mathrm{mdc}(m,n)}{n}\binom{n}{m}$$

é inteiro para todos $n \geq m \geq 1$ *inteiros.*

Problema 4. *Prove que*

$$\mathrm{mdc}(a^m - 1, a^n - 1) = a^{\mathrm{mdc}(m,n)} - 1.$$

Problema 5 (IMO 1991)**.** *Prove que para todo inteiro positivo* n*, existem* n *inteiros consecutivos tais que nenhum é uma potência de primo.*

Dica: Tome x *tal que* $p_i q_i | x + i$*.*

Problema 6 (USAMO 1974)**.** *Sejam* a, b, c *inteiros distintos e* P *um polinômio com coeficientes inteiros. Mostre que é impossível ocorrer* $P(a) = b$*,* $P(b) = c$ *e* $P(c) = a$*.*

Dica: $a - b | P(a) - P(b)$*.*

Problema 7 (IMO 2006)**.** *Seja* $P(x)$ *um polinômio de grau* $n > 1$ *com coeficientes inteiros e* k *um inteiro positivo. Considere o polinômio* $Q(x) = P(P(\cdots(P(x))\cdots))$ *em que* P *é aplicada* k *vezes. Prove que existem no máximo* n *inteiros* t *tais que* $Q(t) = t$*.*

Dica: No problema acima era válido $P(P(P(x))) = x$ *para* $x = a, b, c$*. Utilize uma idéia parecida com a usada no problema acima.*