NÚMEROS COMPLEXOS E TRIGONOMETRIA

RICARDO BORTOLOTTI

Exploremos a relação entre números complexos e trigonometria.

1. Fórmular de Euler

Será de grande auxílio para nós a **Fórmula de Euler**:

$$\boxed{e^{i\theta} = \sin(\theta) + i\cos(\theta)}$$

sendo θ um número real. Partindo dessa expressão, podemos escrever as funções seno e cosseno através das exponenciais complexas:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{e} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Junto a tais expressões, convém recordarmos a **Fórmula de De Moivre**:

$$\boxed{(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$$

Isso permite em muitos problemas trocarmos a multiplicação do ângulo por n por uma potência n-ésima, conforme vemos nos problemas abaixo:

Problema 1. *(IMO-1963) Mostre que*

$$\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) = \frac{1}{2}.$$

Solução. *Considere $\omega = e^{\frac{\pi}{7}}$ e escreva os termos em função de potências de ω, obtendo a soma de termos que formam uma progressão geométrica.*

Problema 2. *Determine expressões para:*
a) $S_1 = \sin(\theta) + \sin(2\theta) + \cdots + \sin(n\theta)$
b) $S_2 = \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta)$
c) $S_3 = \sum_{j=1}^{n} \sin^2(j\theta)$
d) $S_4 = \sum_{j=1}^{n} \cos^2(j\theta)$
e) $S_5 = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \sin(j\theta)$
f) $S_6 = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \cos(j\theta)$

Problema 3. *Calcule* $\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)$.

Problema 4. *(IMO-1962) Resolva a equação*

$$\cos^2(x) + \cos^2(2x) + \cos^2(3x) = 1.$$

Problema 5. *Calcule*

$$\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right).$$

Problema 6. *(OIMU-2001) Calcule*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\cdots\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{n}\right).$$

Problema 7. *(OBM-U-2001) Considerando $f(x) = e^{-x}\sin(x)$, calcule $f^{(2001)}(0)$ (a derivada de ordem 2001 no 0).*

Problema 8. *(OBM-U-2007) Dados números reais $a_1, a_2, \cdots, a_n$ não todos nulos, encontre o (menor) período da função $f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx)$.*

Problema 9. *(IMC 2015) Determine se existem 15 inteiros $m_1, \cdots, m_{15}$ tais que*

$$\sum_{k=1}^{15} m_k \arctan(k) = \arctan(16).$$

Problema 10. *Demonstre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, seguindo estes passos:*

a) Prove que $\sum_{k=1}^{m} \cot^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right) \leq \frac{(2m+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2} \leq m + \sum_{k=1}^{m}\cot^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)$.

b) Determine $\sum_{k=1}^{m} \cot^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)$.

c) Prove que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2. Raízes da unidade e a Fórmula da Multisecção

Quando θ é da forma $\theta = \frac{2\pi j}{n}$ e $z = (e^{i\theta})^n = e^{\frac{2\pi i j}{n}}$, com $j, n \in \mathbb{Z}$, então $z^n = 1$.

Mais precisamente, as raízes da equação $x^n = 1$ são exatamente os números $\omega = e^{\frac{2\pi i j}{n}}$, $0 \leq j < n$, daí que estes números são chamados **raízes da unidade**.

Uma das aplicações das raízes da unidade é o uso delas como "marcadores" para contagens:

Problema 11. *Calcule* $\sum_{3|k} \binom{n}{k}$.

Solução. *Tome $\omega = e^{2\pi i/3}$ e considere as somas S_0, S_1 e S_2 definidas por $S_j = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\omega^j)^k$, $j = 0, 1, 2$. Use o binômio de Newton para determinar S_j e veja que a soma que buscamos é dada por $\frac{S_0 + S_1 + S_2}{3}$.*

O problema acima é um caso particular da chamada **Fórmula da Multisecção**:

Problema 12 (Fórmula da Multisecção)**.** *Dados um polinômio $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, inteiros l e m com $0 \leq l \leq m$ e a raiz da unidade $\omega = e^{\frac{2\pi i}{m}}$,* *então:*

$$\sum_{k\equiv l (mod m)} a_k = \frac{\sum_{0\leq k\leq m} \omega^{-lk} p(\omega^k)}{m}.$$

Dentro dessa ordem de idéias, temos os seguintes problemas:

Problema 13. *(IMO-1974) Mostre que o número* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} 2^{3k}$ *não é divisível por* 5 *para todo inteiro* $n \geq 0$.

Problema 14. *(IMC-1999) Atirando um certo dado com 6 faces equiprovóveis* n *vezes, qual a probabilidade de que a soma dos valores obtidos seja múltiplo de 5?*

Dica. *Considere* $p(x) = \left(\frac{x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6}{6}\right)^n$.

Problema 15. *(IMO-1995) Considere um primo ímpar* p*, determine o número de subconjuntos* $A \subset \{1, 2, \cdots, 2p\}$ *tais que:*

- $\#A = p$;
- A *soma dos elementos de* A *é um múltiplo de* p.

Dica. *Considere* $p(x, y) = (1 + xy)(1 + x^2 y) \cdots (1 + x^{2p} y)$.