Problemas Cálculo I tipo Olimpiada Universitária

extraídos de folclore romeno

13 de Junho de 2017

Critério Cesaro-Stolz

Teorema 1. *Sejam* $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *duas sequencias com termos positivos, tal que* $b_n \nearrow +\infty$ *e tais que existe* $lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = L$; *então existe* $lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ *e*

$$lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Exercicio 1. *Estude a convergência da séries:*

$$i)\ \sum_0^{+\infty} sen\frac{1}{n};\ \ \sum_0^{+\infty} \frac{sen\frac{1}{1} + sen\frac{1}{2} + \ldots sen\frac{1}{n}}{n};$$

$$iii)\ \sum_0^{+\infty} \frac{sen\frac{1}{1} + sen\frac{1}{2} + \ldots sen\frac{1}{n}}{logn}\ \ \sum_0^{+\infty} \frac{sen\frac{1}{1} + sen\frac{1}{2} + \ldots sen\frac{1}{n}}{nlogn},\ \ \sum_0^{+\infty} \frac{sen\frac{1}{1} + sen\frac{1}{2^2} + \ldots sen\frac{1}{n^2}}{logn}.$$

Sugestão: 1. *Use Cesaro-Stolz e critério de comparação.*

Exercicio 2. *Seja* $\{a_n\}$ *uma sequencia com termos positivos. Prove que se existe* $lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, *então existe* $lim_{n\to\infty} \big(a_n\big)^{\frac{1}{n}}$.

Somas de Riemann

Exercicio 3. *Calcule*

$$lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n^2} sen\frac{k}{n^2}.$$

Sugestão: 2. *Use as desigualdades* $x - \frac{x^3}{6} < senx < x,\ \ x > 0$ *e estime* $|\sigma_n - x_n|$ *onde* σ_n *é a soma Riemann para* $\int_0^1 xdx$, *(para a divisão* $0 < \frac{1}{n^2} < \frac{2}{n^2} < \cdots < 1$, *e pontos intermediários convenientes); resposta:* $\int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$.

Exercicio 4. *Calcule* $lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n^2} sen\frac{k}{k^2+n^2}$.

Sugestão: 3. *Use as mesmas ideias do exerecicio anterior. Resposta:* $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}$

Exercicio 5. *Calcule* $lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big[\frac{(2n)!}{n!}\Big]^{\frac{1}{n}}$.

Sugestão: 4. *Escreva*

$x_n = \frac{1}{n}\Big[\frac{(2n)!}{n!}\Big]^{\frac{1}{n}} = \Big[(1+\frac{1}{n})\cdot(1+\frac{2}{n})\cdot\cdots\cdot(1+\frac{n}{n})\Big]^{\frac{1}{n}}$; *logaritmando, obtemos:*

$$logx_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} log\big(1+\frac{k}{n}\big) \to \int_0^1 log(1+t)dt.$$

Cálculo de algumas somas usando integrais reais

Exercicio 6. *Ache a soma*

$$C_n^0 - \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{5}C_n^2 + \cdots + \frac{(-1)^n C_n^n}{2n+1}.$$

Sugestão: 5. *Calcule de duas maneiras a integral* $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$ *: uma vez diretamente, a segunda, usando a substituição* $y = senx$ *e obtendo uma recorrência:* $I_{2n+1} = 2nI_{2n-1} - 2nI_{2n+1}$, *de onde* $I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1}$; *Resposta:* $\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$.

Exercicio 7.

$$2^n C_n^0 - \frac{2^{n-1}}{2} C_n^1 + \frac{2^{n-2}}{3} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1} C_n^n.$$

Sugestão: 6. *Calcule de duas formas a integral*

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} sen^{2n}(\frac{x}{2}) senx dx,$$

uma vez usando fórmula de duplicação e integração por partes, depois fazendo a mudança de variável $y = (1 - cost)$ *para obter* $I_n = \frac{1}{2^n} \int_{\frac{1}{2}}^1 y^n dy = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Resposta: $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Exercicio 8. *Ache*

$$1 = \frac{C_n^1}{2} + \cdots + \frac{C_n^n}{n+1}.$$

Sugestão: 7. *Integre* $f(x) = (1+x)^n$ *sobre* $[0,1]$.

Algumas desigualdades

Exercicio 9. *Ache* $\int_0^1 cos(x^2) dx \in (\frac{9}{10}, \frac{13}{14})$.

Sugestão: 8. *use que* $cos(x^2) \geq 1 - \frac{x^4}{2}$, $x > 0$ *e que* $senx^2 > x^2 - \frac{x^6}{6}$, *de onde* $cosx^2 = 1 - 2senx^2 \geq 1 - 2(\frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{48})$;

Exercicio 10. *Seja* $f : [a,b] \to R$, *uma função duas vezes derivável com* $f'' \geq 0$; *prove que*

$$(b-a) f(\frac{a+b}{2}) \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Interprete no gráfico.

Sugestão: 9. *considere a função* $F(x) = \int_a^x f(t)dt - (x-a) f(\frac{a+x}{2})$, *derive-a e use a fórmula de Lagrange:* $F'(x) = f(x) - f(\frac{a+x}{2}) - \frac{x-a}{2} f'(\frac{a+x}{2}) = \frac{x-a}{2}\big(f'(c_x) - f'(\frac{a+x}{2})\big) \geq 0$

Exercicio 11. *Seja $f : [a,\ b] \to R$, uma função integrável e crescente. Prove que*

$$\int_a^b f(x)dx \geq \frac{a+b}{2}\big[f(a)+f(b)\big]$$

Sugestão: 10. *Use a desigualdade de Cebisev.*

Exercicio 12. *Seja f uma função integrável; mostre que*

$$\Big[\int_a^b f(x)\, sen\, x dx\Big]^2 + \Big[\int_a^b f(x)\cos x dx\Big]^2 \leq (b-a)\int_a^b f^2(x)dx.$$

Sugestão: 11. *Use a desigualdade de Cauchy-Buniakowski e some.*

Exercicio 13. *Sejaf integrável e positiva; mostre que*

$$\int_a^b f(x)dx \geq e^{\int_a^b ln(f(x))dx}.$$

Sugestão: 12. *Use a desigualdade de Jensen.*

Exercicio 14. *Se $f : [0,1] \to R$ é uma função continua, mostre que*

$$\Big[\int_0^1 x^2 f(x)dx\Big] \leq \frac{1}{3}\int_0^1 x^2 f^2(x)dx.$$

Sugestão: 13. *Use Cauchy Buniakowski; igualdade se só se $f(x) = 1$.*

Exercicio 15. *Se $f : [0,1] \to R$ é uma função derivável, com derivada continua e tal que $f(0) = f(1) = 0$, então*

$$\Big[\int_0^1 f(x)dx\Big]^2 \leq \frac{1}{12}\int_0^1 [f'(x)]^2 dx.$$

Quando há igualdade?

Sugestão: 14. *Integre por partes, use as hipôteses e a desigualdade Cauchy-Buniakowski; a igualdade se obtém se só se $f(x) = cx(x-1)$.*

Teoremas de média e aplicações

Teorema 2. *Se $f, g : [a,\ b] \to R$, são integráveis e se $g(x) \geq 0$, então existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

Fazendo $f(x) = 1$, obtemos

Corolário 1. *Se $g : [a,\ b] \to R$, continua e $g(x) \geq, 0$ então existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$\int_a^b g(x)dx = g(c)(b-a).$$

Teorema 3. *(teorema de média)*

Se $f, g : [a,\ b] \to R$, são integráveis e se $g(a) \geq 0$, e g decrescente, então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^c f(x)dx$$

Teorema 4. *(Teorema de média de Weierstrass)*

Sejam $f, g : [a,\ b] \to R$, tais que f continua e g monótona; então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^c f(x)dx + g(b)\int_c^b f(x)dx.$$

Exercicio 16. *Seja $f : [0, 1] \to R$, uma função continua tal que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$. Mostre que f possui um ponto fixo.*

Sugestão: 15. *Use teorema de média para $h(x) = f(x) - x$.*

Exercicio 17. *Seja $f : [0, 1] \to R$, uma função continua tal que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{2}{\pi}$. Mostre que existe um ponto $x_0 \in (0, 1)$ tal que $f(x_0) = x_0$.*

Sugestão: 16. *Use a fórmula de média para $h(x) = f(x) - sen(\pi\, x)$.*

Exercicio 18. *Seja $f : [a,\ b] \to R$, continua.MOstre que existe um ponto $c \in (a, b)$ tal que $\int_a^c f(t)dt = \int_c^b f(t)dt$. Seja, para todo x*

Sugestão: 17. *Use propriedade de Darboux.*

Exercicio 19. *Se $f : [0, 1] \to \infty$ é uma função crescente e continua, então*

$$0 \leq \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) \leq \frac{f(1) - f(0)}{n}.$$

Sugestão: 18. *Escreve tudo sob integrais e use a monotonia de f.*

Exercicio 20. *Seja $f : [a,\ b] \to R$, uma função continua, tal que $\int_a^b f(t)dt = 0$; se $a > 0$, mostre que existe um ponto $c \in (a, b)$ tal que $\int_a^c f(t)dt = cf(c)$.*

Sugestão: 19. *Use o teorema de Rolle para $g(x) = \frac{1}{x}\int_a^x f(t)dt$.*

Exercicio 21. *Seja $f : [0,\ 1] \to R$, continua em $[0,\ 1]$, e derivável em $(0,\ 1)$, tal que existe $L > 0$ com $|f'(t)| < L$, para todo $t \in (0,\ 1)$.*

Mostre que

$$|\int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})| \leq \frac{L}{2n}.$$

Sugestão: 20. *Aplique o teorema de Lagrange para cada intervalo, majore e depois estime um integral linear.*

Exercicio 22. *Mostre que*

$$lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\big[e^{(\frac{k}{k^2+n^2})}-1\big]=\frac{1}{2}log2.$$

Mostre que

$$lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}sen\big(\frac{k}{k^2+n^2}\big)=\frac{1}{2}log2.$$

Sugestão: 21. *Prove que*

$$lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\big[f\big(x_0+\frac{k}{k^2+n^2}\big)-f(x_0)\big]=\frac{1}{2}f'(x_0)log2,$$

apicando o teorema de média em cada intervalo, etc

Várias

Exercicio 23. *Se F é uma primitiva da função $f(x)=e^{x^2}$, calcule $lim_{x\to\infty}\frac{xF(x)}{f(x)}$.*

Sugestão: 22. *use teorema de Lagrange para mostrar que $f(x)\to\infty$, depois use L ´Hospital;*