Universidade Federal de Pernambuco
Primeiro Exercício Escolar de Cálculo 3
05 de Março de 2017
Aluno: **Turma:**

Questão 1. (3,0) Considere um arame fino com o formato da hélice de parametrização $\vec{r}(t) = (t, \cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 1$. Calcule o comprimento da curva e a massa do arame, sabendo que a densidade do fio em cada ponto é igual ao quadrado da sua distância à origem.

Questão 2. Considere o campo vetorial $\vec{F} : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ dado por

$$\vec{F}(x,y) = \left(-\frac{y^3}{(x^2+y^2)^2}, \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2} \right).$$

(a) (1,0) Mostre que $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \pi$, onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = R^2$.

(b) (0,5) O campo $\vec{F}$ é conservativo em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$? Justifique.

(c) (0,5) Sendo $\vec{F} = (P, Q)$, mostre que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

(d) (0,5) Mostre que $\displaystyle\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \pi$ para toda curva C fechada simples que circunde a origem.

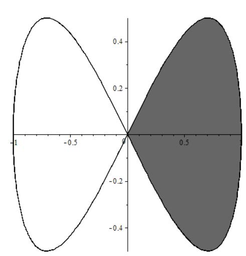
Questão 3. Considere o campo vetorial $\vec{F}(x,y) = (10x^4 - 2xy^3, -3x^2y^2)$.

(a) (0,5) Mostre que $\vec{F}$ é conservativo sem calcular um potencial.

(b) (1,0) Obtenha um potencial para $\vec{F}$.

(c) (0,5) Calcule $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde C é a parte da curva $x^5 - 5x^2y^2 - 7x^2 = 0$ de $(0,0)$ a $(3,2)$.

Questão 4. A curva de equação $x^4 = x^2 - y^2$ é chamada *Lemniscata de Gerono*. Seu gráfico está esboçado abaixo.



Uma parametrização para a parte da Lemniscata de Gerono que circunda a região colorida na figura acima é

$$\vec{r}(t) = (\sin(t), \sin(t)\cos(t)), \ 0 \leq t \leq \pi.$$

(a) (0,5) A parametrização acima percorre a curva no sentido horário ou anti-horário? Justifique.

(b) (1,0) Seja D uma região plana cuja fronteira é uma curva fechada e simples C. Mostre que a área de D pode ser calculada pela fórmula

$$A(D) = \left| \int_C x dy \right|.$$

(c) (1,0) Calcule a área da parte colorida na figura acima.