PROBLEMAS DE OLIMPÍADA UNIVERSITÁRIA
ALGEBRA LINEAR

1. Problemas Diversos

Problema 1 (IMC 2011 - Dia 1, Problema 2)**.** *Existe uma matriz real* 3×3 *tal que* $\operatorname{tr}(A) = 0$ *e* $A^2 + A^T = I$*?*

Problema 2 (OBMU)**.** *Seja* A *uma matriz real quadrada* $n \times n$*. Suponha que existe um inteiro positivo* m *tal que* $(X^2 + I)^m = 0$*.*
a) Mostre que $n \neq 2011$*.*
b) Se $n = 2010$*, é possível concluir que* $X^2 + I = 0$ *?*

Problema 3 (IMC 2003)**.** *Seja* A *uma matriz real* $n \times n$ *tal que*

$$3A^3 = A^2 + A + I.$$

Mostre que a sequência $\{A^k\}$ *converge para uma matriz idempotente (*B *é idempotente se satisfaz* $B^2 = B$*).*

Problema 4 (IMC 2003)**.** *Sejam* A *e* B *matrizes* $n \times n$ *tais que* $AB + A + B = 0$*. Mostre que* $AB = BA$*.*

Problema 5 (IMC 1995)**.** *Seja* X *uma matriz quadrada invertível com colunas* $x_1, x_2, \cdots, x_n$*. Seja* Y *a matriz com colunas* $x_2, x_3, \cdots, x_n, 0$*. Mostre que as matrizes* $A = YX^{-1}$ *e* $B = X^1Y$ *tem posto* $n - 1$ *e que seus autovalores são todos iguais a* 0*.*

Problema 6 (OBMU 2008, Segunda fase)**.** *Prove que não existe uma matriz real* 7×7 *com entradas não negativas cujos auto-valores (contando com multiplicidade) são:* $6, -5, -5, 1, 1, 1$ *e* 1*.*

2. Problemas de matrizes da OBM nos últimos 5 anos

Problema 7 (OBMU 2016 - Segunda Fase, Problema 4)**.** *Seja* $A = \begin{bmatrix} 4 & -\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} & -3 \end{bmatrix}$*. Encontre todos os pares de números* $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ *com* $|m| \leq n$ *tais que*

$$A^n - (n^2 + m)A$$

tenha todas as entradas inteiras.

Problema 8 (OBMU 2016 - Primeira Fase, Problema 1)**.** *Encontre todas as matrizes* 2×2 *com entradas reais tais que*

$$A^3 + 3A^2 + 2I = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Problema 9 (OBMU 2015 - Segunda Fase, Problema 4)**.** *Sejam* Q *uma matriz real ortogonal* $n \times n$ *(ou seja,* $QQ^T = Q^TQ = I$*) e* P *uma matriz real de permutação (ou seja, as entradas de* P *são iguais a* 0 *ou* 1*, com exatamente uma entrada igual a* 1 *por linha ou por coluna).*

Prove que as duas condições abaixo são equivalentes:
a) Existem matrizes triangulares superiores U_0 *e* U_1 *com* $Q = U_0PU_1$.
b) Existem matrizes triangulares inferiores L_0 *e* L_1 *com* $Q = L_0PL_1$.

Problema 10 (OBMU 2014 - Primeira Fase, Problema 2). *Considere as matrizes* 3×3 *cujas entradas são inteiros entre* 0 *e* 9 *(inclusive). Determine o maior determinante possível de uma tal matriz.*

Problema 11 (OBMU 2012 - Primeira Fase, Problema 5). *Sejam* $M_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $M_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ *e* $M_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. *Para cada uma das matrizes* M_i, $i = 1, 2, 3$, *determine quantas matrizes* A_i *existem com* $A_i^5 = M_i$.

Problema 12 (OBMU 2012 - Segunda Fase, Problema 2). *Considere todas as matrizes quadradas de ordem* $4n$ *que têm* $4n$ *entradas iguais a* 1 *e* $4n$ *entradas iguais a* -1 *e as demais entradas iguais a* 0. *Qual é o maior valor possível de seu determinante (em função de* n*)?*

3. Um pouco de teoria

Definição 1. *Seja* A *uma matriz quadrada, o* ***polinômio minimal de*** A, *denotado por* p_A^m *é o polinômio mônico (coeficiente de maior grau igual a* 1*)* $q(x)$ *de menor grau tal que* $q(A) = 0$.

Definição 2. *Seja* A *uma matriz quadrada, o* ***polinômio característico de*** A, *denotado por* p_A^c *é o polinômio* $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

Fato 1 (Traço e determinante). *Se* A *e* B *são matrizes quadradas, então:*

- $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$;
- $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$;
- $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^T)$ *e* $\det(A) = \det(A^T)$;
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- *Se* A *é triangular, então* $\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

Se $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ *são os auto-valores de* A *(contados com multiplicidade), então:*

- $\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$;
- $\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$.
- *Se* A *é triangular, então os auto-valores de* A *são os elementos da diagonal principal de* A.

Fato 2. *Seja* A *uma matriz quadrada complexa.*

- *(Teorema de Cayley-Hamilton)* p_A^m *divide* p_A^c;
- $p(A) = 0$ *se e somente se* p_A^m *divide* p.
- *Todos os auto-valores de* A *são raízes de* p_A^m.
- *Se* $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ *são os auto-valores de* A *e* $q(x)$ *um polinômio, então os auto-valores de* $q(A)$ *são* $q(\lambda_1), \cdots, q(\lambda_n)$.