# PROBLEMAS OLÍMPICOS DE CÁLCULO

RICARDO BORTOLOTTI

## 1. Problemas diversos da OBM-U

**Problema 1** (OBMU 2004)**.** *Calcule* $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^{2004}}{1+e^x} dx.$

*Dica: mudança de variáveis* $y = -x$ *e* $\frac{1}{1+e^x} + \frac{1}{1+e^{-x}} = 1$.

**Problema 2** (OBMU 2010)**.** *Calcule* $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \frac{x}{(\sin x + \cos x)\cos x} dx.$

*Dica: alguma simetria semelhante ao item acima.*

**Problema 3** (OBMU 2011)**.** *Para cada* $t \in \mathbb{R}$, *seja* $P_t(x) = x^3 - 12x + t$, *e seja*

$$\Delta(t) = \max\{c \in \mathbb{R} | P_t(c) = 0\} - \min\{c \in \mathbb{R} | P_t(c) = 0\}$$

*a diferença entre a maior raiz real e a menor raiz real de* $P_t$. *Determine o conjunto de valores que* $\Delta(t)$ *pode assumir quando* $t$ *varia.*

*Dica: o gráfico de* $P_t$ *é uma translação do gráfico de* $P_0$, *derive a raiz* $x(t)$ *implicitamente para saber como* $\Delta(t)$ *varia com* $t$.

## 2. Somas de Riemann

**Problema 4.** *Seja* $S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$. *Calcule* $\lim_{n\to\infty} S_n$.

*Dica:* $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$.

**Problema 5.** *Calcule* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{1\le i<j\le n} \sin\frac{i+j}{n}$.

**Problema 6.** *Calcule* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left[\frac{(2n)!}{n!}\right]^{\frac{1}{n}}$.

*Dica: tome o logaritmo.*

## 3. Séries de potências

**Problema 7** (OBMU 2009)**.** *Considere a sequência* $a_0, a_1, \cdots$ *definida por* $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{\pi}{3}$ *e, para* $n \geq 1$,

$$a_{n+1} = \frac{\pi(a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \cdots + a_n a_0)}{3(n+1)}$$

*Calcule*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{2^k} = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} + \frac{a_3}{8} + \cdots .$$

*Dica: considere a série de potências* $f(x) = \sum a_n x^n$ *e obtenha uma equação diferencial para* $f$.

**Problema 8** (OBMU 2004)**.** *Calcule*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)(3k+3)}$$

.

## 4. A recorrência $x_{n+1} = x_n^2 - x_n$

**Problema 9** (OBMU 2003)**.** *Defina* $a_1 = 3$ *e* $a_{n+1} = a_n^2 - 2$. *Prove que* $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \ln a_n}{n} = \ln 2$ *e calcule* $\lim_{n\to\infty} (\ln \ln a_n - n \ln 2)$.

*Dica:* $a_n = \alpha^{2^n} + \frac{1}{\alpha^{2^n}}$ *para algum* $\alpha \in \mathbb{C}$.

**Problema 10** (IMC 2010)**.** *Sejam* $x_1 = \sqrt{5}$ *e* $x_{n+1} = x_n^2 - 2$. *Calcule*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}{x_{n+1}}.$$

*Dica:* $x_n = \alpha^{2^n} + \frac{1}{\alpha^{2^n}}$ *para algum* $\alpha \in \mathbb{C}$.

**Problema 11** (Putnam 2014)**.** *Sejam* $a_0 = \frac{5}{2}$ *e* $a_{k+1} = a_k^2 - 2$ *para todo* $k \geq 1$. *Calcule*

$$\prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{a_k}\right).$$

## 5. Truque de Feynman

**Problema 12.** *Calcule* $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 - 1}{\ln x} dx$.

*Dica: Considere* $I(t) = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln x} dx$ *e calcule* $I'(t)$.

**Problema 13.** *Para* $a > b > 0$, *calcule* $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x(e^{ax}+1)(e^{bx}+1)} dx$.

## 6. Funções Contínuas

**Problema 14** (Equação de Cauchy)**.** *Determine todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que*

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

*para todos reais $x$ e $y$.*

**Problema 15** (Leningrado)**.** *Uma função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e $F(x) \cdot F(F(x)) = 1$ para todo $x$ real. Sabendo que $F(1000) = 999$, encontre $F(500)$.*

**Problema 16.** *Determine se existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua satisfazendo*

$$f(f(x)) = -x.$$

**Problema 17.** *Prove que a única função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo*

$$f(f(f(x))) = x$$

*é a identidade.*

*Dica: se $f$ é injetiva e contínua, então tem que ser monótona.*

**Problema 18.** *Dizemos que $a > 0$ é corda universal se, para toda função contínua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ com $f(0) = f(1)$ existem $x, y \in [0,1]$ com $|x - y| = a$ e $f(x) = f(y)$. Determine todas as cordas universais.*

## 7. Teorema de Aproximação de Stone-Weiestrass

**Teorema de Aproximação de Stone-Weiestrass:** se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então para todo $\epsilon > 0$ existe um polinômio $P$ tal que $|f(x) - P(x)| < \epsilon$ para todo $x \in [a,b]$.

**Problema 19.** *Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Prove que*

$$\lim_{n\to\infty} (n+1) \int_0^1 x^n f(x)dx = f(1).$$

*Dica: Aplique o Teorema de Aproximação de Stone-Weiestrass*

**Problema 20** (IMC 2003)**.** *Seja $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $f_n : (0,1] \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções definida por $f_0(x) = g(c)$ e $f_{n+1}(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f_n(t)dt$ para todo $x \in (0,1]$ e $n \geq 0$. Determine $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para todo $x \in (0,1]$.*

*Dica: A mesma do problema acima.*

**Problema 21.** *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\int_a^b x^n f(x)dx = 0$ para todo inteiro $n \geq 0$. Mostre que $f$ é identicamente nula em $[a,b]$.*

## 8. Problemas com Teoria dos Números

**Problema 22.** *Se* $A = \{n \in \mathbb{N},\ n$ *não tem o dígito* 7 *em sua representação decimal* $\}$, *prove que*

$$\sum_{n \in A} \frac{1}{n} < +\infty$$

**Problema 23.** *Prove que existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que os 2017 primeiros dígitos de* $2^n$ *são iguais a* 1.

*Dica: Se* $\alpha$ *é irracional, então a sequência* $\{n\alpha\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é densa em* $[0,1]$.

**Problema 24.** *a) Seja* $p(x)$ *um polinômio de grau* $n$ *com coeficientes inteiros e seja* $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ *tal que* $p(\alpha) = 0$. *Prove que existe* $c > 0$ *tal que*

$$|\alpha - p/q| > c/q^n$$

*para quaisquer* $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$.

*b) Prove que* $\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$ *é* ***transcedente****, isto é, não existe nenhum polinômio não nulo de coeficientes racionais com* $p(\alpha) = 0$.

**Problema 25.** *Prove que para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\limsup_{n\to\infty} \cos^n(n\alpha) = 1.$$