PROBLEMAS DE OLIMPÍADA UNIVERSITÁRIA
CÁLCULO

1. Problemas da OBMU nos últimos anos

Problema 1 (OBMU-2016 - Segunda Fase, Problema 1). *Seja $\{a_n\}$ uma sequência de número reais tal que $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n}$ converge. Prove que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = 0$$

Problema 2 (OBMU-2012 - Segunda Fase, Problema 5). *Seja $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ uma função duas vezes derivável satisfazendo $f'(x) < 0$ para todo $x > 0$. Para cada $x > 0$ considere o triângulo cujos lados são a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$ e os dois eixos coordenados. Sabemos que a área deste triângulo é igual a C (constante e independente de x).*

Determine os possíveis valores de $f(1)$.

Problema 3 (OBMU-2016 - Segunda Fase, Problema 6). *Dados $C, D > 0$, dizemos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é bonita se f é de classe C^2, $|x^3 f(x)| \leq C$ e $|xf''(x)| \leq D$ para todo x com $|x| \geq 1$.*

a) Prove que se f é uma função bonita então, dado $\epsilon > 0$, existe $x_0 > 0$ tal que, para $|x| \geq x_0$, $|x^2 f'(x)| < \sqrt{2CD} + \epsilon$.

b) Prove que, se $0 < E < \sqrt{2CD}$, então existe uma função bonita $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $x_0 > 0$, existe $x > x_0$ com $|x^2 f'(x)| > E$.

Problema 4 (OBMU-2015 - Segunda Fase, Problema 3). *Mostre que, para todo $b > 0$, temos*

$$I(b) = \int_1^\infty \frac{\sqrt{u+b}}{u^2+b} du > \frac{\pi}{2}.$$

Problema 5 (OBMU-2013 - Primeira Fase). *Seja $P(X)$ um polinômio com coeficientes inteiros satisfazendo $P(n) = n$ para todo inteiro n com $1 \leq n \leq 6$ e $|P(0)| \leq 2013$. Determine quantos e quais são os possíveis valores de $P(0)$.*

Problema 6 (OBM 2011 - Segunda Fase, Problema 1). *Para cada $t \in \mathbb{R}$, seja $P_t(x) = x^3 - 12x + t$, e seja $\Delta(t) = \max\{c \in \mathbb{R} | P_t(c) = 0\} - \min\{c \in \mathbb{R} | P_t(c) = 0\}$ a diferença entre a maior raiz real e a menor raiz real de $P_t(x)$. Determine o conjunto de valores que $\Delta(t)$ pode assumir quando t varia.*

Problema 7 (OBMU-2013 - Primeira Fase). *Considere a parábola de equação $y = x^2/4$. Encontre o raio da circunferência que é tangente a esta parábola e ao eixo y no foco $(0, 1)$ da parábola.*

Problema 8 (XXVI OBMU - Primeira Fase). *Calcule* $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^{2004}}{1+e^x}dx.$

Problema 9 (OBMU 2012 - Primeira Fase). *a) Determine o maior valor possível de* $|\sin^2(x)\cdot\sin(2x)|$ *para* $x\in\mathbb{R}$.

b) Prove que para todo inteiro k*, se* $x=\frac{2\pi r}{2^k-1}$*, com* r *inteiro, então*

$$\left|\prod_{j=0}^{k-1}\sin(2^j x)| = |\sin(x)\cdot\sin(2x)\cdot\dots\cdot\sin(2^{k-1}x)\right| \le (\sqrt{3}/2)^k.$$

Problema 10 (OBMU 2010). *Calcule* $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{x}{(\sin x+\cos x)\cos x}dx.$

Problema 11 (OBMU 2011). *A função* $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ *é contínua em* $[0,+\infty)$ *e diferenciável em* $(0,+\infty)$ *e satisfaz* $f(x+1)=\cos f(x)$ *para todo* $x\in[0,+\infty)$*. Sabemos que* $f(0)=0$ *e* $f'(2)=1$.

Mostre que existe um único número real d *tal que o limite abaixo exista e pertença a* $(0,+\infty)$*:*

$$a=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x^d}.$$

Determine os valores de d *e de* a.

Problema 12 (OBMU 2009). *Seja* $f:[0,1]\to[0,1]$ *crescente, derivável e inversível tal que* $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f^{-1}(x)dx.$

Prove que existem reais a *e* b*,* $0\le a<b\le 1$*, tais que* $f'(a)=f'(b)=1$.

Problema 13 (OBMU 2009). *Considere a sequência* $a_0, a_1, \cdots$ *definida por* $a_0=0$*,* $a_1=\frac{\pi}{3}$ *e, para* $n\ge 1$*,*

$$a_{n+1}=\frac{\pi(a_0a_n+a_1a_{n-1}+a_2a_{n-2}+\cdots+a_na_0)}{3(n+1)}$$

Calcule

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{2^k}=a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{4}+\frac{a_3}{8}+\cdots.$$

Problema 14 (OBMU 2008). *Seja* $P_n=\sum_{0\le k\le n} sin^n(\frac{\pi k}{n})$*. Calcule*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_nP_{n+1}}{n}.$$

Problema 15 (OBMU 2008). *Prove que*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda}{(\lambda+n^2)^2}<\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda+n^2}$$

para todo $\lambda\ge 0$.

Problema 16 (OBMU 2005)**.** *Sejam f e f funções contínuas distintas de $[0,1]$ em $(0,+\infty)$ tais que $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx$. Defina $y_n = \int_0^1 \frac{(f(x))^{n+1}}{(g(x))^n}dx$.*
Prove que $\{y_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência crescente e divergente.

Problema 17 (OBMU 2004)**.** *Calcule*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)(3k+3)}$$

.

Problema 18 (OBMU 2003)**.** *Defina $a_1 = 3$ e $a_{n+1} = a_n^2 - 2$.*
Prove que $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\ln a_n}{n} = \ln 2$ e calcule $\lim_{n\to\infty}(\ln\ln a_n - n\ln 2)$.
Dica: $a_n = \alpha^{2^n} + \frac{1}{\alpha^{2^n}}$ para algum $\alpha \in \mathbb{C}$.

Problema 19 (OBMU 2001)**.** *Para todo real u, seja $I(u) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1 - 2u\cos x + u^2)dx$.*
a) Prove que $I(u) = I(-u) = \dfrac{1}{2}I(u^2)$.
b) Calcule $I(u)$ para todo $u \in \mathbb{R}$.

2. Derivadas

Problema 20 (IMC 2014)**.** *Seja $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, para $x > 0$, e n um inteiro positivo. Prove que*

$$|f^{(n)}(x)| < \frac{1}{n+1},$$

aonde $f^{(n)}$ denota a n-ésima derivada de f.

3. Integrais

Problema 21. *Calcule $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2-1}{\ln x}dx$.*
Dica: Considere $I(t) = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^t-1}{\ln x}dx$ e calcule $I'(t)$.

Problema 22. *Para $a > b > 0$, calcule $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x(e^{ax}+1)(e^{bx}+1)}dx$.*

Problema 23 (OBMU 2010)**.** *Calcule $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos x(\sin x + \cos x)}dx$.*

4. Funções Contínuas

Problema 24 (Equação de Cauchy)**.** *Determine todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que*

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

para todos reais x e y.

Problema 25 (Suécia - 1989)**.** *Determine todas as funções contínuas* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tais que*

$$f(x) + f(x^2) = 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Problema 26 (Leningrado)**.** *Uma função* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é contínua e* $F(x) \cdot F(F(x)) = 1$ *para todo* x *real. Sabendo que* $F(1000) = 999$, *encontre* $F(500)$.

Problema 27 (Bulgária - 1997)**.** *Determine todas as funções contínuas* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tais que*

$$f(x) = f(x^2 + \frac{1}{4})$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Problema 28. *Seja* $f : [0,1] \to [0,1]$ *uma função contínua tal que* $f \circ f = f$. *Defina* $E_f = \{x \in [0,1] | f(x) = x\}$.

a) Prove que $E_f \neq \emptyset$.

b) Prove que E_f *é um intervalo.*

Problema 29. *Determine se existe* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *contínua satisfazendo*

$$f(f(x)) = -x.$$

Problema 30. *Prove que a única função contínua* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfazendo*

$$f(f(f(x))) = x$$

é a identidade.

Dica: se f *é injetiva e contínua, então tem que ser monótona.*

Problema 31 (Curva de Peano)**.** *Prove que existe uma função contínua sobrejetiva* $f : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$. *(tal função é chamada de **curva de Peano**)*

Problema 32. *Dizemos que* $a > 0$ *é corda universal se, para toda função contínua* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *com* $f(0) = f(1)$ *existem* $x, y \in [0,1]$ *com* $|x - y| = a$ *e* $f(x) = f(y)$. *Determine todas as cordas universais.*

Problema 33. *Seja* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Prove que*

$$\lim_{n\to\infty} (n+1) \int_0^1 x^n f(x)dx = f(1).$$

Dica: Aplique o Teorema de Aproximação de Stone-Weiestrass da seguinte maneira: primeiro demonstre o resultado para polinômios e depois use a aproximação para ver que o mesmo também é válido para funções.

Teorema de Aproximação de Stone-Weiestrass: *se* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua, então para todo* $\epsilon > 0$ *existe um polinômio* P *tal que* $|f(x) - P(x)| < \epsilon$ *para todo* $x \in [a,b]$.

Problema 34 (IMC-2003)**.** *Seja* $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e* $f_n : (0,1] \to \mathbb{R}$ *uma sequência de funções definida por* $f_0(x) = g(c)$ *e* $f_{n+1}(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f_n(t)dt$ *para todo* $x \in (0,1]$ *e* $n \geq 0$*. Determine* $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *para todo* $x \in (0,1]$*.*

Dica: A mesma do problema acima.

Problema 35. *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua tal que* $\int_a^b x^n f(x)dx = 0$ *para todo inteiro* $n \geq 0$*. Mostre que* f *é identicamente nula em* $[a,b]$*.*

5. Problemas de Análise e Teoria dos Números

Problema 36. *Seja* $A = \{n \in \mathbb{N} | n$ *não tem o dígito* 7 *em sua representação decimal* $\}$*. Prove que*

$$\sum_{n\in A} \frac{1}{n} < +\infty$$

Problema 37. *Prove que existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que os 2017 primeiros dígitos de* 2^n *são iguais a* 1*.*

Dica: Se α *é irracional, então a sequência* $\{n\alpha\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é densa em* $[0,1]$*.*

Problema 38. *Prove que existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que os 2017 primeiros dígitos de* 2^n *são iguais a* 1 *e os 2017 primeiros dígitos de* 3^n *são iguais a* 2*.*

Dica: Se $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ *tem coordenadas racionalmente independentes então a sequência* $\{n\alpha\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é densa em* $[0,1]^n$*.* ($\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ *são* ***racionalmente independentes*** *se* $m_1\alpha_1 + \cdots + m_n\alpha_n = m$*,* $m, m_1, \cdots, m_n \in \mathbb{Z}$*, implica que* $m = m_1 = \cdots = m_= 0$*)*

Problema 39. *a) Seja* $p(x)$ *um polinômio de grau* n *com coeficientes inteiros e seja* $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ *tal que* $p(\alpha) = 0$*. Prove que existe* $c > 0$ *tal que*

$$|\alpha - p/q| > c/q^n$$

para quaisquer $p, q \in \mathbb{Z}$*,* $q > 0$*.*

b) Prove que $\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$ *é* ***transcedente****, isto é, não existe nenhum polinômio não nulo de coeficientes racionais com* $p(\alpha) = 0$*.*

Problema 40. *Seja* $S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$*. Calcule* $\lim_{n\to\infty} S_n$*.*

Dica: Escreva $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$ *e veja como uma soma de Riemann.*

Problema 41. *Calcule* $S_n = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{1\leq i<j\leq n} \sin\frac{i+j}{n}$*.*

Problema 42. *Prove que para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$*,*

$$\limsup_{n\to\infty} \cos^n(n\alpha) = 1.$$

Problema 43. *Prove que as séries*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)}\ ,\ \cdots\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)\cdots(\ln\cdots\ln n)}$$

são divergentes.

Dica: Utilize o teste da integral.

Problema 44 (XXIV OBM-U)**.** *Dados $x\in\mathbb{R}$, definimos $\ln_0(x)=x$ e, para cada $k\in\mathbb{N}$, se $\ln_k(x)>0$, definimos $\ln_{k+1}(x)=\ln(\ln_k(x))$, onde $\ln$ é o logaritmo natural.*

Dado n inteiro positivo, definimos $k(n)$ como o maior k tal que $\ln_k(n)\geq 1$, e $a_n=\pi_{j=0}^{k(n)}\ln_j(x)=n\ln n(\ln\ln n)\cdots\ln_{k(n)}(n)$.

Diga se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ converge ou diverge.

Problema 45 (IMC 2010)**.** *Sejam $x_1=\sqrt{5}$ e $x_{n+1}=x_n^2-2$. Calcule*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n}{x_{n+1}}.$$

Dica: $x_n=\alpha^{2^n}+\frac{1}{\alpha^{2^n}}$ para algum $\alpha\in\mathbb{C}$.