

Elementos de Teoria dos Números (2020.3) - Prova 1
Prof. Ricardo Bortolotti

1. Prove por indução que 19 divide $2^{2^{6k+2}} + 3$ para $k = 0, 1, 2, \dots$.
2. Prove que se $(a, b) = 1$, então existe um sistema completo de resíduos módulo a formado por números congruentes a 1 módulo b .
3. Existem infinitos inteiros compostos da forma $10^n + 3$?
4. Existem infinitos primos p tais que $\frac{p^3 + 8^{p-1} - 1}{5^p + 7}$ é inteiro?
5. Encontre todos os inteiros $n > 1$ tais que $1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n$ é múltiplo de n .
6. Prove que se $p > 3$ é primo então $p^2 \equiv 1 \pmod{24}$.
7. Prove que todo primo diferente de 2 e 5 é múltiplo de infinitos números da forma $1, 11, 111, 1111, \dots$.
8. Prove que para todo inteiro positivo n existe um inteiro positivo x tal que cada um dos termos $x + 1, x^x + 1, x^{x^x} + 1, \dots$ é múltiplo de n .
9. Determine todos os primos da forma $10^n + 1$.
10. Encontre todos os inteiros n tais que $\Phi(n) = 8$.