Primeira Prova - Análise no Rn

(24 de Setembro de 2021)

Questão 1. Para todo conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, prove que:

a) O interior $\operatorname{int} X$ é o maior conjunto aberto contido em X, isto é, se A é aberto e $A \subset X$ então $A \subset \operatorname{int} X$.

b) X é fechado se, e somente se, $X \supset \operatorname{fr} X$.

c) X é aberto se, e somente se, $X \cap \operatorname{fr} X = \emptyset$.

d) Se para todo $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto tem-se que $X \cap K$ é compacto, então X é fechado.

Questão 2. Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto e $f : X \times K \to \mathbb{R}^p$ contínua tal que para cada $x \in X$ existe um único $y \in K$ tal que $f(x, y) = 0$. Prove que y depende continuamente de x (isto é, a função $h : X \to K$ que satisfaz $f(x, h(x)) = 0$ é contínua).

Questão 3. Sejam $F, J \subset \mathbb{R}^n$ fechados com $F \cap J = \emptyset$. Prove que existem abertos U e V tais que $F \subset U$, $J \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Questão 4. Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ caminhos de classe C^1. Prove que

$$\int_a^b \langle f(t), g'(t)\rangle dt = \langle f(b), g(b)\rangle - \langle f(a), g(a)\rangle - \int_a^b \langle f'(t), g(t)\rangle dt.$$

Questão 5. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \to \mathbb{R}$ possui derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R}$ limitadas para $i = 1, \cdots, n$, prove que f é contínua.

Questão 6. Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável no ponto 0.

a) Se $f(tx) = tf(x)$ para todo $t > 0$ e todo $x \in \mathbb{R}^n$, prove que f é linear.

b) Se f é de classe C^2 tal que $f(tx) = t^2 f(x)$ para todo $t > 0$ e todo $x \in \mathbb{R}^n$, prove que existem $a_{ij} \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ para todo $x = (x_1, \cdots, x_n)$.

Questão 7. Seja $f : I \times J \to \mathbb{R}$ de classe C^2 no retângulo aberto $I \times J \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ é identicamente nula. Prove que existem $\phi : I \to \mathbb{R}$ e $\psi : J \to \mathbb{R}$ de classe C^2 tais que $f(x, y) = \phi(x) + \psi(y)$ para todo $(x, y) \in I \times J$.

Questão 8. Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tais que vale $g(x) = f(x)(1 + f(x)^4)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Se g é de classe C^k, $k \geq 1$, prove que f também é de classe C^k.