Primeira Prova - Análise Vetorial

(28 de Janeiro de 2020)

Questão 1. (2.0) Prove que todo caminho fechado em $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ é livremente homotópico a um caminho contido em S^n. Conclue que $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ é simplesmente conexo quando $n > 1$.

Questão 2. (2.0) Prove que uma superfície m-dimensional M é orientável se, e somente se, existe uma forma contínua ω de grau m em M tal que $\omega(x) \neq 0$ para todo $x \in M$.

Questão 3. (2.0) Em cada item, determine se a afirmação é verdadeira ou falsa. *(Se for verdadeira, demonstre. Se for falsa, dê um contra-exemplo.)*

(a) (0.5) Toda n-forma diferencial de classe C^2 em $\mathbb{R}^n$ é exata.

(b) (0.5) Sejam α, β formas de classe C^2 na superfície M. Se β é fechada, então $d\alpha \wedge \beta$ é exata.

(c) (0.5) Se ω é uma 2-forma em $\mathbb{R}^6$ então $\omega \wedge \omega \wedge \omega = 0$.

(d) (0.5) Se ω é uma 3-forma em $\mathbb{R}^6$ então $\omega \wedge \omega = 0$.

Questão 4. (2.0) Seja ω uma 1-forma fechada em $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ para a qual existe uma constante $R > 0$ tal que $\omega(x) = 0$ para todo $\|x\| > R$. Prove que ω é exata.

Questão 5. (2.0)

(a) (0.5) Enuncie o Lema de Poincaré.

(b) (1.5) Demonstre o Lema de Poincaré assumindo a validade da seguinte afirmação: "Dado um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, existe uma transformação linear $K : \Lambda^r(U \times \mathbb{R}) \to \Lambda^{r-1}(U)$ tal que

$$K d\omega + dK\omega = i_1^*\omega - i_0^*\omega$$

para toda $\omega \in \Lambda^r(U \times \mathbb{R})$, onde $i_t(x) := (x, t)$ para todo $x \in U$."