Primeira Prova - Cálculo Avançado

(28 de Outubro de 2021)

Questão 1. Para todo conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, prove que:

a) O fecho $\overline{X}$ é o menor conjunto fechado que contém X, isto é, se F é fechado e $X \subset F$ então $\overline{X} \subset F$.

b) Se X é aberto e $\pi(x_1, \cdots, x_n) = x_i$ é a projeção sobre a i-éimas coordenada, então $\pi_i(X)$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}$.

c) Se f é contínua, então $f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$. Através de um exemplo, mostre que a inclusão pode ser própria.

Questão 2. Sejam $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}^m$ caminhos diferenciáveis e $\varphi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação bilinear. Prove que $g(t) = \varphi(f_1(t), f_2(t))$ é um caminho diferenciável e

$$g'(t) = \varphi(f_1'(t), f_2(t)) + \varphi(f_1(t), f_2'(t)).$$

Questão 3. Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ e $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Se $\|f'(t)\| \leq \varphi'(t)$ para todo $t \in (a, b)$, prove que

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \varphi(b) - \varphi(a).$$

Conclua a Desigualdade do Valor Médio a partir deste fato.

Questão 4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(0, 0) = 0$ e

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \quad \text{se } (x, y) \neq (0, 0).$$

Prove que para todo $v \in \mathbb{R}^2$, existe a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$, mas f não é diferenciável no ponto $(0, 0)$

Questão 5. Prove que, numa vizinhança de $(0, 0, 0)$, a equação

$$x^4 + 2x \cos y + \sin z = 0$$

define z como função de classe C^∞ das variáveis x, y e também define x em função de y, z como função de classe C^∞, mas não define y como função de x, z.

Questão 6. Seja $K \subset \mathbb{R}^m$. Prove que K é compacto se e somente se toda função contínua $f : K \to \mathbb{R}^n$ é limitada.

Questão 7. Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável no ponto 0.

a) Se $f(tx) = tf(x)$ para todo $t > 0$ e todo $x \in \mathbb{R}^n$, prove que f é linear.

b) Se f é de classe C^2 tal que $f(tx) = t^2 f(x)$ para todo $t > 0$ e todo $x \in \mathbb{R}^n$, prove que existem $a_{ij} \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ para todo $x = (x_1, \cdots, x_n)$.