Medida e Integração - Primeira Prova

(01 de Outubro de 2018)

Nesta prova, $(\mathbb{R}^d, \mathscr{L}, m)$ denota o espaço de medida com $\mathscr{L}$ a σ-álgebra de Lebesgue e m a medida de Lebesgue.

Questão 1. (5.0) Demonstre as seguintes afirmações.

(a) (1.0) Se $U \subset \mathbb{R}^d$ é aberto e $f, g : U \to \mathbb{R}^k$ são funções contínuas tais que $f(x) = g(x)$ para m-quase todo ponto $x \in U$, então $f(x) = g(x)$ para todo $x \in U$.

(b) (1.0) Para, $E, F \in \mathscr{L}$, se $m(E) = m(F) < +\infty$ e $m(F - E) = 0$, então $m(E \Delta F) = 0$.
Obs: $E \Delta F := (E - F) \cup (F - E)$.

(c) (1.0) Se $U \subset \mathbb{R}^d$ é aberto, $f : U \to \mathbb{R}$ é uma função Lebesgue-mensurável e $g : U \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x)$ para m-quase todo ponto $x \in U$, então g é Lebesgue-mensurável.

(d) (1.0) Se $f_n \in L(\mathbb{R}^d, \mathscr{L}, m)$ com $\|f_n\|_1 \leq K < +\infty$ para todo $n \geq 1$ e $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para m-qtp $x \in \mathbb{R}^d$, então f é integrável e $\|f\|_1 \leq K$.

(e) (1.0) Se $1 \leq p \leq r \leq s < +\infty$ e $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ é tal que $f \in L^p$ e $f \in L^s$, então $f \in L^r$.

Questão 2. (2.0) Sejam $\mu, \nu : \Sigma \to [0, +\infty]$ duas medidas finitas definidas na σ-álgebra Σ do conjunto X satisfazendo $\mu(X) = \nu(X)$.

(a) Prove que o conjunto $\mathscr{A} = \{A \in \Sigma | \mu(A) = \nu(A)\}$ é uma σ-álgebra.

(b) Supondo que Σ é gerada por um família $\mathscr{C}$, prove que $\mu = \nu$ se e somente se $\mu(A) = \nu(A)$ para todo $A \in \mathscr{C}$.

Questão 3. (1.5) Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida, g uma função mensurável não-negativa em X e ν definida por

$$\nu(E) = \int_E g d\mu.$$

Sabendo que ν é uma medida em Σ, prove que para qualquer função $f \in L^1(X, \Sigma, \nu)$ é válido

$$\int_X f d\nu = \int_X f g d\mu.$$

Questão 4. (1.5) Dada $u \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathscr{L}, m)$, definimos a *transformada de Fourier*

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} u(x) e^{-i\langle \xi, x \rangle} dm(x),$$

onde $\xi \in \mathbb{R}^d$ e $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ para $\theta \in \mathbb{R}$. Mostre que $\hat{u}$ é contínua e limitada em $\mathbb{R}^d$.