Medida e Integração - Primeira Prova

(28 de Setembro de 2017)

Questão 1. (2.0) Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mensurável para a qual cada conjunto

$$X_c = \{x \in [0,1] | f(x) \leq c\}$$

tem medida de Lebesgue 0 ou 1. Prove que existe uma constante $c_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = c_0$ para Lebesgue-quase todo $x \in [0,1]$.

Questão 2. (2.0) Sejam $(X, \mathscr{B}, \mu)$ um espaço de medida, g uma função mensurável não-negativa em X e ν definida por

$$\nu(E) = \int_E g d\mu.$$

Prove que ν é uma medida em $\mathscr{B}$. Prove ainda que, para qualquer função mensurável f em X é válido

$$\int_X f d\nu = \int_X f g d\mu.$$

Questão 3. (2.0) Em cada item, determine se a afirmação é verdadeira ou falsa. *(Se for verdadeira, demonstre. Se for falsa, dê um contra-exemplo.)*

(a) (1.0) Se $(X, \mathscr{B}, \mu)$ um espaço de medida finita e $1 \leq p \leq r \leq \infty$, então $L^r \subset L^p$.

(b) (1.0) Se μ é uma medida boreliana σ-finita em $\mathbb{R}^k$ que é positiva em abertos (isto é, $\mu(U) > 0$ para todo aberto $U \subset \mathbb{R}^k$), então a função $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \mu\big(x + (0,1)^k\big)$ é contínua.

Questão 4. (2.0) Sejam $(X, \mathscr{B}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \to \mathbb{C}$ uma função integrável. Mostre que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que para todo conjunto mensurável E com $\mu(E) < \delta$ temos

$$\Big| \int_E f d\mu \Big| < \epsilon.$$

Questão 5. (2.0) A *medida de Gauss* é a medida boreliana μ em $[0,1]$ definida por

$$\mu(A) = \frac{1}{\log 2} \int_A \frac{dx}{1+x}$$

para todo $A \subset [0,1]$ boreliano. A *transformação de Gauss* é a função $T : [0,1] \to [0,1]$ definida por

$$T(x) = 1/x - \lfloor 1/x \rfloor$$

se $x \in (0,1]$ e $T(0) = 0$. *($\lfloor 1/x \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a $1/x$.)*

(a) (1.0) Prove que $\mu(A) = 0$ se e somente se a medida de Lebesgue de A é nula.

(b) (1.0) Prove que $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ para todo conjunto boreliano $A \subset [0,1]$.