Sistemas Dinâmicos - Primeira Prova

(18 de Setembro de 2017)

Questão 1. (2.5) Considere o círculo $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e as transformações $T, F : S^1 \to S^1$ dadas por

$$T(x) = x + \frac{1}{8\pi}\sin(2\pi x) \quad \text{e} \quad F(x) = x + \frac{1}{8\pi}\sin(6\pi x).$$

(a) (1.0) Verifique que T e F são difeomorfismos de Morse-Smale, determinando quais pontos periódicos são atratores e quais são repulsores.

(b) (1.0) Descreva a órbita de $x_0 = \frac{2}{3}$ para T e para F.

(c) (0.5) Existe uma conjugação topológica entre T e F?

Questão 2. (2.5) Fixado um inteiro $k \geq 2$, considere o espaço das sequências infinitas formadas por k símbolos

$$\Sigma_k := \{x = (a_n)_{n\geq 0} | a_n \in \{1, \cdots, k\}\} = \{1, \cdots, k\}^{\mathbb{N}},$$

com a métrica

$$d\big((a_n), (b_n)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n - b_n|}{k^n},$$

e o deslocamento de k símbolos $\sigma : \Sigma_k \to \Sigma_k$ definido por $\sigma\big((a_n)_{n\geq 0}\big) = (a_{n+1})_{n\geq 0}$. Prove que:

(a) (1.0) $\#Fix(\sigma^n) = k^n$.

(b) (1.0) Existe $x \in \Sigma$ cuja órbita $o(x) = \{\sigma^j(x)\}_{j\geq 0}$ é densa em Σ.

(c) (1.0) Dado um número finito de abertos $U_1, \cdots, U_s \subset \Sigma$, existe um ponto periódico x cuja órbita intersecta U_j para todo $j = 1, \cdots, s$.

Questão 3. (2.5) Considere $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, intervalos fechados disjuntos I_1, I_2, I_3 e $\lambda > 1$ tais que $T(I_j) \supset I_1 \cup I_2 \cup I_3$ para $j \in \{1, 2, 3\}$ e $|T'(x)| \geq \lambda$ para todo $x \in J \cap T^{-1}(J)$, onde $J := I_1 \cup I_2 \cup I_3$. Defina $\Lambda := \cap_{k=0}^{\infty} T^{-k}(J)$ e $h : \Lambda \to \Sigma$ por

$$h(x) = (s_0, s_1, s_2, \cdots),$$

se $T^j(x) \in I_{s_j}$ para todo $j \geq 0$.

Prove que h está bem definida e é uma conjugação topológica entre $T_{|_\Lambda}$ e o deslocamento de 3 símbolos.

Questão 4. (2.5) Prove que $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$T(x) = x^3 + \frac{3}{4}x$$

é C^1-estruturalmente estável.