Teoria Ergódica - Primeira Prova

(02 de Maio de 2019)

Parte 1

Questão 1. (2.0)

(a) Enuncie o Teorema Ergódico de Birkhoff.

(b) Dado um inteiro $k \geq 2$, verifique que a transformação $f : [0,1] \to [0,1]$ definida por $f(x) = kx - \lfloor kx \rfloor$ preserva a medida de Lebesgue m e que m é ergódica para f.

(c) Prove que para quase todo número $x \in [0,1]$, o bloco 101 aparece na expansão de x na base k com frequência $\dfrac{1}{k^3}$.

Questão 2. (1.5) Sejam $f, g : M \to M$ duas transformações contínuas num espaço métrico compacto M que comutam entre si, isto é, $f \circ g = g \circ f$. Prove que existe alguma medida de probabilidade μ que é invariante por f e g.

Questão 3. (1.5) Seja $f : X \to X$ uma transformação que preserva uma medida μ. Prove que μ é ergódica para f se, e somente se, para todos A, B mensuráveis com $\mu(A) > 0$ e $\mu(B) > 0$ existe algum inteiro n tal que $\mu(f^{-n}A \cap B) > 0$.

Questão 4. (1.0) Mostre que se $\{\mu_P : P \in \mathscr{P}\}$ é uma desintegração de μ, então

$$\int \psi d\mu = \int \Big(\int \psi d\mu_P \Big) d\hat{\mu}(P)$$

para toda função mensurável limitada $\psi : M \to \mathbb{R}$.

Parte 2

Questão 5. (2.0) O dígito líder de um inteiro n é o primeiro dígito em sua expansão na base 10 e o penúltimo dígito líder é o segundo dígito em sua expansão decimal (por exemplo, o dígito líder de 1024 é 1 e o penúltimo dígito líder é 0).

(a) Prove que a frequência de n's tais que 2^n tem dígito líder r é $\log_{10}(1 + 1/r)$.

(b) Qual a frequência de n's tais que o penúltimo dígito líder de 2^n é 7?

(c) Qual a frequência com n's tais que o último dígito líder de 2^n é 3 e o último dígito de 3^n é 4 (para o mesmo n).

Questão 6. (1.5) Considere a transformação $f : [0,1] \to [0,1]$ dada por $f(x) = 4x(1-x)$ e a medida μ definida por

$$\mu(E) = \frac{1}{\pi} \int_E \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

Mostre que μ é uma probabilidade invariante para f.

Questão extra. (1.0) Prove que μ é ergódica para f.

Questão 7. (2.0) Para todo $k \in \mathbb{N}$ e $r \in (0,1)$, mostre que existem um inteiro $M = M(k,r)$ e uma constante $\delta = \delta(k,r)$ tais que o seguinte é válido:

Se $f : X \to X$ é uma transformação mensurável, μ uma medida de probabilidade invariante por f e $A \subset M$ mensurável com $\mu(A) \geq r$, existem $A_0 \subset A$ mensurável e inteiros positivos $N_1, \cdots, N_k \leq M(k,r)$ tais que $\mu(A_0) \geq \delta(k,r)$ e

$$f^{N_1 + \cdots + N_j}(x) \in A$$

para todos $1 \leq j \leq k$ e $x \in A_0$.

Dica: Resolva primeiro o caso $k = 1$, tomando $M(1,r) = \left\lfloor \frac{1}{r} \right\rfloor$ e $\epsilon(1,r)$ pequeno. Faça o caso geral por indução em k.