Teoria Ergódica - Primeira Prova

(03 de Maio de 2018)

Questão 1. (1.0) Seja $T : [0,1] \to [0,1]$ dada por $T(x) = x^2$.

(a) (0.5) Determine o conjunto $M_1(T)$ das medidas de probabilidade T-invariantes.

(b) (0.5) Determine as medidas ergódicas para T.

Questão 2. (2.0) Considere o círculo $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, a rotação $R_\alpha : S^1 \to S^1$ dada por

$$R_\alpha(x) = x + \alpha (\mathrm{mod}\, 1)$$

e m a medida de Lebesgue em S^1.

(a) (0.5) Mostre que m é preservada por R_α.

(b) (1.0) Mostre que se $\alpha \notin \mathbb{Q}$, então m é ergódica para R_α.

(c) (0.5) Mostre que se $\alpha \in \mathbb{Q}$, então m não é ergódica para R_α.

Questão 3. (2.0) Considere a transformação expansão decimal $f : [0,1] \to [0,1]$, dada por

$$f(x) = 10x - \lfloor 10x \rfloor$$

e m a medida de Lebesgue em $[0,1]$.

(a) (0.5) Mostre que m é preservada por f.

(b) (1.0) Mostre que m é ergódica para f.

(c) (0.5) f é unicamente ergódica?

Questão 4. (2.0) Seja $f_1, \cdots f_q : M \to M$ uma família qualquer de transformações contínuas num espaço métrico compacto que comutam entre si, isto é, $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$ para todo $1 \leq i, j \leq q$. Prove que existe alguma medida de probabilidade μ que é invariante por f_i para todo $i \in \{1, \cdots, q\}$.

Questão 5. (1.5) Mostre que se $\{\mu_P : P \in \mathscr{P}\}$ é uma desintegração de μ, então

$$\int \psi d\mu = \int \Big(\int \psi d\mu_P \Big) d\hat{\mu}(P)$$

para toda função mensurável limitada $\psi : M \to \mathbb{R}$.

Questão 6. (1.5) Sejam $f : X \to X$ uma transformação mensurável, μ uma medida de probabilidade invariante por f e $E \subset M$ mensurável. Prove que existem $E_1 \subset E$ mensurável e um inteiro positivo $N \leq \left\lfloor \dfrac{1}{\mu(E)} \right\rfloor$ tais que $\mu(E_1) > 0$ e $f^N(x) \in E$ para todo $x \in E_1$.

Isso demonstra que o tempo de primeiro retorno é no máximo $\left\lfloor \frac{1}{\mu(E)} \right\rfloor$ *para um subconjunto de medida positiva.*