Elementos de Teoria dos Números (2020.3) - Prova 2

Prof. Ricardo Bortolotti

1. a) Determine se 5 é resíduo quadrático módulo 103.

   b) Quais são os primos p para os quais 5 é resíduo quadrático?

2. Seja p um primo ímpar, prove que se g é uma raiz primitiva módulo p então

$$g^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}.$$

3. Seja p um primo ímpar, considere o primo de Mersenne $M_p = 2^p - 1$ e q um divisor primo de M_p.

   a) Prove que 2 tem ordem p módulo q.

   b) Usando o item anterior, conclua que $2^{\frac{q-1}{2}} \equiv 1 \pmod{q}$.

   c) Usando o item anterior, conclua que 2 é resíduo quadrático módulo q e que $q \equiv \pm 1 \pmod{8}$.

4. a) Encontre a fração contínua que representa o número $\sqrt{13}$.

   b) Determine qual o números representado pela fração contínua $[1, \overline{2, 3}] = [1, 2, 3, 2, 3, \cdots]$.

   c) Sabendo que $e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \cdots]$, encontre os primeiros 6 convergentes desta fração contínua.