Segunda Prova - Análise no Rn

(28 de Outubro de 2021)

Questão 1. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diferenciável com $f(p) = p$. Se $f'(p)$ não admite autovalor 1, prove que existe uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^n$ tal que $f(x) \neq x$ para todo $x \in V - \{p\}$.

Questão 2. Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Dadas $f : U \to \mathbb{R}^n$, $g : U \to \mathbb{R}^p$, $T : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, defina $\phi : U \to \mathbb{R}$ por $\phi(x) = \langle T(x) \cdot f(x), g(x) \rangle$. Assumindo que f, g e T são diferenciáveis em $x \in U$, determine $\phi'(x) \cdot h$.

Questão 3. Sejam $\phi : U \to |R^m$ de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ e $c \in [0, 1)$ tais que

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| \leq c\|x - y\| \quad \forall x, y \in U.$$

Prove que $f : U \to \mathbb{R}^m$ dada por $f(x) = x + \phi(x)$ é um difeomorfismo de U sobre o aberto $V = f(U)$. Se $U = \mathbb{R}^m$, prove que f é sobrejetiva.

Questão 4. Seja $f = (f_1, \cdots, f_n) : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. Prove que f é uma submersão se, e somente se, em cada ponto $x \in U$ os vetores $\operatorname{grad} f_1(x), \cdots, \operatorname{grad} f_n(x)$ são linearmente independentes.

Questão 5. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ de classe C^k de dimensão m. O fibrado tangente de M é o conjunto

$$TM = \{(p, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; p \in \mathbf{M}, v \in T_pM\}.$$

Prove que TM é uma superfície de classe C^{k-1} e dimensão $2m$.

Questão 6. Seja $f : M \to N$ difeomorfismo local. Se N é orientável prove que M também é.

Questão 7. Se $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ é submersão, prove que é aplicação aberta (ou seja, que A aberto implica $f(A)$ também aberto).

Questão 8. Seja $M \subset \mathbb{R}^4$ o conjunto dos pontos (x, y, z, w) que satisfazem a equação

$$x^4y^4z^4w^3 + x^2y^2z^2w = 2$$

a) Prove que M é uma superfície de classe C^∞ e dimensão 3.

b) Dê a equação do plano tangente a M em $(1, 1, 1, 1)$.

c) Explique porque é possível encontrar uma função $g(x, y, z)$ definida em uma vizinhança de $(1, 1, 1)$ tal que a vizinhança de $(1, 1, 1, 1)$ em M é o gráfico de $(x, y, z, g(x, y, z))$.

d) Prove que a interseção de M com o plano $y + z + w = 3$ é uma superfície de dimensão 2 e classe C^∞.