Segunda Prova - Análise Vetorial

(21 de Fevereiro de 2020)

Questão 1. (2.0) Seja $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k no subconjunto aberto U da superfície M, de classe C^k. Dado um subconjunto $F \subset U$ fechado em M, prove que existe uma aplicação $\Phi : M \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k tal que $\Phi(x) = \phi(x)$ para todo $x \in F$.

Questão 2. (2.0) Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície compacta n-dimensional com bordo de classe C^k, $k \geq 2$. Prove que

$$\mathrm{vol}(M) = \frac{1}{n} \int_{\partial M} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} x_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Em particular, se $n = 2$, tem-se área de $D = \frac{1}{2} \int_{\partial M} xdy - ydx$ para $D \subset \mathbb{R}^2$.

Questão 3. (2.0) Seja ω uma m-forma de classe C^1 num aberto $U \subset \mathbb{R}^{m+1}$. Dado um ponto $x \in U$, identifiquemos por $S(r)$ a esfera de centro x e raio $r > 0$, e por $B(r)$ a bola correspondente. Prove que se $\{e_1, \cdots, e_{m+1}\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^{m+1}$, então vale

$$d\omega(x)(e_1, \cdots, e_{m+1}) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\mathrm{vol} B(r)} \int_{S(r)} \omega.$$

Conclua que ω é fechada se, e somente se, para todo domínio compacto $D \subset U$ com bordo ∂D de classe C^2 tem-se $\int_{\partial D} \omega = 0$.

Dica: Use o Teorema de Stokes.

Questão 4. (2.0) Sejam α e β formas contínuas com suportes compactos e graus máximos nas superfícies orientadas M e N respectivamente. Considere as projeções $\pi_M : M \times N \to M$ e $\pi_N : M \times N \to N$. Mostre que se tem

$$\int_{M \times N} \pi_M^* \alpha \wedge \pi_N^* \beta = \left(\int_M \alpha \right) \cdot \left(\int_N \beta \right).$$

(a) (1.0) Resolva a questão assumindo que M é um aberto de $\mathbb{R}^m$ e N um aberto de $\mathbb{R}^n$.

(b) (1.0) Resolva a questão no caso geral.

Obs 1: Uma forma de grau máximo numa superfície M é uma forma de grau $\dim M$.
Obs 2: Uma projeção $\pi_X : X \times Y \to X$ satisfaz $\pi_X(x, y) = x$.

Questão 5. (3.0) Considere um difeomorfismo local $f : M \to N$, onde M é uma superfície compacta m-dimensional orientada sem bordo, e N é uma superfície conexa.

Obs: f é dito um difeomorfismo local se para todo ponto $x \in M$ existem vizinhanças $U \subset M$ de x e $V \subset N$ de $f(x)$ tal que a restrição $f_{|U} : U \to V$ é um difeomorfismo.

(a) (0.3) Prove que a imagem de f é um conjunto aberto e fechado em N, conclua que f é sobrejetiva.

(b) (0.3) Prove que $\#f^{-1}(y) = \#\{x \in M, f(x) = y\}$ é finito para todo $y \in N$.

(c) (0.4) Prove que todo $y \in N$ possui uma vizinhança aberta V tal que $f^{-1}(V) = U_1 \cup \cdots \cup U_k$ é união finita de abertos U_i's dois a dois disjuntos tais que U_i é transformada por f difeomorficamente sobre V.

(d) (0.3) Considere a função $k : N \to \mathbb{Z}$ definida por $k(y) = \#f^{-1}(y)$ se f preserva orientação e $k(y) = -\#f^{-1}(y)$ se f inverte orientação. Prove que k é constante igual a um inteiro r.

Definição: O inteiro r acima é o *grau topológico de* f, e é denotado por $\mathrm{grau}(f)$.

(e) (1.0) Prove que se $\omega \in \Lambda^m(N)$, então

$$\int_M f^*\omega = \mathrm{grau}(f) \cdot \int_N \omega.$$

(f) (0.3) Sejam M, N, S superfícies m-dimensionais compactas orientadas conexas sem bordo, $f : M \to N$ e $g : N \to S$ difeomorfismos locais, prove que

$$\mathrm{grau}(g \circ f) = \mathrm{grau}(f) \cdot \mathrm{grau}(g).$$

(g) (0.4) Prove que se $f, g : M \to N$ são difeomorfismos locais homotópicos, então $\mathrm{grau}(f) = \mathrm{grau}(g)$.