Segunda Prova - Cálculo Avançado

(02 de Dezembro de 2021)

Questão 1. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por $f(x, y, z) = (3x + \cos(yz), 4y^2, \sin y, e^z)$.

a) Determine $f'(x, y, z) \cdot (u, v, w)$.

b) Prove que f é uma imersão.

Questão 2.

a) Enuncie o Teorema da Aplicação Inversa.

b) Prove que $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ é uma aplicação aberta, isto é, se $A \subset U$ é aberto então $f(A) \subset \mathbb{R}^n$ é aberto.

c) Enuncie a Forma Local das Submersões.

d) Prove que toda submersão $f : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 é uma aplicação aberta.

Questão 3. Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ diferenciável, com $f(0) = 0$. Se $f'(0)$ não admite autovalor 1, prove que existe uma vizinhança V de 0 em $\mathbb{R}^m$ tal que $f(x) \neq x$ para todo $x \in V - \{0\}$.

Questão 4. Sejam $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ e $c \in []0, 1)$ tais que $\|\phi(x) - \phi(y)\| \leq c\|x - y\|$ para quaisquer $x, y \in U$. Prove que para $f : U \to \mathbb{R}^m$, definida por $f(x) = x + \phi(x)$, vale que $V = f(U)$ é aberto e f é um difeomorfismo entre U e V. Se $U = \mathbb{R}^m$, prove que $f(U) = \mathbb{R}^m$.

Questão 5. Considere o conjunto S dos pontos (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$ tais que

$$z^2 + (2 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 = 1.$$

a) Prove que S é uma superfície de dimensão 2 e classe C^∞.

b) Determine o plano tangente a S no ponto $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$.

Questão 6. Denote por M o conjunto das matrizes 4×4 de posto 2. Prove que M é um superfície de dimensão 12 e classe C^∞. Generalize para matrizes $m \times n$ de posto k.

Questão 7. (EXTRA) Seja r inteiro e, para cada, $i = 1, \cdots, r$ considere $f_i : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ função de classe C^k, c_i valor regular de f_i, e M_i a hiperfície $M_i = f_i^{-1}(c_i)$. Se os gradientes $\operatorname{grad} f_1(x), \cdots, \operatorname{grad} f_r(x)$ formam um conjunto linearmente independente para todo $x \in M_1 \cap \cdots \cap M_r$, então $M = M_1 \cap \cdots \cap M_r$ é uma superfície de dimensão $m - r$ e de classe C^k.