Medida e Integração - Segunda Prova

(28 de Novembro de 2018)

Em toda a prova: (X, Σ, μ) denota um espaço de medida, $f_n, g_n, f, g : X \to \mathbb{R}$ são funções mensuráveis, m é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < +\infty$.

Questão 1. (2.0) Enuncie os seguintes teoremas:

(a) (0.5) Teorema de Radon-Nikodym.

(b) (0.5) Teorema de Tonelli.

(c) (0.5) Teorema de Fubini.

(d) (0.5) Teorema da Diferenciação de Lebesgue.

Questão 2. (5.0) Verdadeiro ou Falso (se for verdadeiro, demonstre; se for falso, dê um contra-exemplo).

(a) (1.0) Se $\mu(X) < +\infty$ e f_n converge para f em L^p, então f_n converge para f em medida.

(b) (1.0) Se f_n converge para f em medida, então f_n converge para f em L^p.

(c) (1.0) Se f_n converge para f em μ-quase todo ponto, então f_n converge para f quase uniformemente.

(d) (1.0) Se $\mu(X) < +\infty$, $f_n \to f$ e $g_n \to g$ em medida, então $f_n g_n \to fg$ em medida.

(e) (1.0) Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e f é contínua em x, então x é um ponto de Lebesgue de f.

Questão 3. (2.0) Se μ, ν, λ são medidas σ-finitas em (X, Σ), $\nu \ll \lambda$, $\lambda \ll \mu$ e $\mu \ll \lambda$, então:

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{d\nu}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\mu} \qquad \mu\text{-qtp.}$$

Prove também que $\nu \times \mu \ll \lambda \times \lambda$ e

$$\frac{d(\nu \times \mu)}{d(\lambda \times \lambda)}(x_1, x_2) = \frac{d\nu}{d\lambda}(x_1) \times \frac{d\mu}{d\lambda}(x_2) \qquad \lambda \times \lambda - \text{qtp.}$$

Questão 4. (1.0) Considere $\alpha > 0$ e $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \frac{1}{(1 + \|x\|^2)^\alpha}.$$

Para quais valores de p é válido que $F \in L^p(\mathbb{R}^n, m)$?

Dica: Use que $\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\|x\|^2} \leq \dfrac{1}{1 + \|x\|^2} \leq \dfrac{1}{\|x\|^2}$ *se* $\|x\| \geq 1$.