Medida e Integração - Segunda Prova

(30 de Novembro de 2017)

Questão 1. (4.0) Em cada item, determine se a afirmação é verdadeira ou falsa. *(Se for verdadeira, demonstre. Se for falsa, dê um contra-exemplo.)*

(a) (0.5) Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida e $f_n : X \to \mathbb{R}$ mensuráveis, $n \geq 0$. Se $f_n \to f_0$ em L^p, então $f_n \to f_0$ em medida.

(b) (0.5) Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida finita e $f_n : X \to \mathbb{R}$ mensuráveis, $n \geq 0$. Se $f_n \to f_0$ em medida, então $f_n \to f_0$ quase uniformemente.

(c) (1.0) Existe um espaço de medida finita (X, Σ, μ) e $f_n : X \to \mathbb{R}$ mensuráveis, $n \geq 0$, tal que $f_n \to f_0$ em quase todo ponto, $f_n \to f_0$ em medida, $f_n \to f_0$ quase uniformemente, mas f_n não converge para f_0 em L^1.

(d) (1.0) Seja $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ contínua em $x \in \mathbb{R}^k$ tal que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^k)$, então x é um ponto de Lebesgue de f.

(e) (1.0) Sejam (X, Σ) um espaço mensurável e μ, ν medidas tais que $\mu \ll \nu$ e $\mu \perp \nu$, então $\mu = 0$.

Questão 2. (2.0) Para $j = 1, 2$, sejam μ_j, ν_j medidas σ-finitas em (X_j, Σ_j), e seja λ medida σ-finita em X_1 tais que $\nu_j \ll \mu_j$, $\mu_j \ll \lambda$, para $j = 1, 2$.

(a) (1.0) Mostre que $\dfrac{d(\mu_1 + \mu_2)}{d\lambda} = \dfrac{d\mu_1}{d\lambda} + \dfrac{d\mu_2}{d\lambda}$ e $\dfrac{d\nu_1}{d\lambda} = \dfrac{d\nu_1}{d\mu_1} \cdot \dfrac{d\mu_1}{d\lambda}$ para λ-qtp.

(b) (1.0) Mostre que $\nu_1 \times \nu_2 \ll \mu_1 \times \mu_2$ e $\dfrac{d(\nu_1 \times \nu_2)}{d(\mu_1 \times \mu_2)}(x_1, x_2) = \dfrac{d\nu_1}{d\mu_1}(x_1) \times \dfrac{d\nu_2}{d\mu_2}(x_2)$ para $\mu_1 \times \mu_2$-qtp $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$.

Questão 3. (2.0) Seja $F : [a, b] \to \mathbb{R}$. Então existe $M > 0$ tal que

$$|F(x) - F(y)| \leq M|x - y|$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se, e somente se, F é absolutamente contínua e $|F'| \leq M$ em qtp.

Questão 4. (2.0) Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida σ-finita, m a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$, $\mathscr{B}$ a σ-álgebra de Borel em $[0, +\infty)$ e $f : X \to \mathbb{R}$ integrável não-negativa, defina

$$G_f = \{(x, y) \in X \times [0, +\infty), y \leq f(x)\}.$$

Então G_f é $\Sigma \times \mathscr{B}$-mensurável e

$$\mu \times m(G_f) = \int_X f d\mu.$$