# Teoria Ergódica - Segunda Prova

(21 de Junho de 2018)

**Questão 1.** (2.0) Mostre que se nenhum autovalor de $A \in SL(d, \mathbb{R})$ é uma raiz da unidade então o endomorfismo linear $f_A : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ induzido por $A$ é misturador, com respeito à medida de Lesbesgue em $\mathbb{T}^d$.

**Questão 2.** (2.0) Seja $M$ um espaço métrico compacto. Mostre que, dado qualquer $\epsilon_0 > 0$, a restrição da função entropia $f \to h(f)$ ao conjunto das transformações contínuas $f : M \to M$ que são $\epsilon_0$-expansivas é semicontínua superiormente (relativamente à topologia da convergência uniforme).

**Questão 3.** (1.5) Sejam $f : M \to M$ e $g : N \to N$ transformações contínuas em espaços métricos compactos. Se existe um homeomorfismo $h : M \to N$ tal que $h \circ f = g \circ h$ então

$$P(g, \phi) = P(f, \phi \circ h)$$

para todo potencial $\phi : N \to \mathbb{R}$.

**Questão 4.** (1.5) Seja $\sigma : \{1, \cdots, d\}^{\mathbb{N}} \to \{1, \cdots, d\}^{\mathbb{N}}$ o deslocamento e $\phi$ um potencial localmente constante (ou seja, $\phi$ é constante em cada cilindro $[0; i]$). Calcule $P(\sigma, \phi)$.

**Questão 5.** (1.5) Sejam $\mu$ e $\nu$ probabilidades invariantes por transformações $f : M \to M$ e $g : N \to N$ tais que $(f, \mu)$ e $(g, \nu)$ são ergodicamente equivalentes.

(a) (1.0) Mostre que $h_\mu(f) = h_\nu(g)$.

(b) (0.5) Os deslocamentos $\sigma_2 : \{1, 2\}^{\mathbb{N}} \to \{1, 2\}^{\mathbb{N}}$ e $\sigma_3 : \{1, 2, 3\}^{\mathbb{N}} \to \{1, 2, 3\}^{\mathbb{N}}$ munidos das medidas de Bernoulli $\mu_2$ e $\mu_3$ (respectivamente) que dão pesos iguais a todos os símbolos são ergodicamente equivalentes?

**Questão 6.** (2.5) Dados números $\alpha, \beta > 0$ tais que $\alpha + \beta < 1$, defina $g : [0, \alpha] \cup [1 - \beta, 1] \to [0, 1]$ por

$$g(x) = x/\alpha, \text{ se } x \in [0, \alpha], \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{x - 1}{\beta} + 1, \text{ se } x \in [1 - \beta, 1].$$

Seja $K \subset [0, 1]$ o conjunto dos pontos $x \in [0, 1]$ tais que $g^n(x)$ está bem definido para todo $n \geq 0$ (isto é, $g^n(x) \in [0, \alpha] \cup [1 - \beta, 1]$ para todo $n \geq 0$) e seja $f : K \to K$ a restrição de $g$.

(a) (1.5) Determine $\psi(t) = P(f, -t \log g')$.

(b) (0.5) Verifique que $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é convexa, decrescente e admite um único zero em $(0, 1)$.

(c) (0.5) Mostre que $h_\mu(f) < \int \log g' d\mu$ para toda probabilidade $\mu$ invariante por $f$.