Terceira Prova - Cálculo Avançado

(22 de Dezembro de 2021)

Questão 1. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função limitada integrável no conjunto X J-mensurável, com $f(x) \geq 0$ para todo $x \in X$. Prove que $C(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}; x \in X, 0 \leq y \leq f(x)\}$ é J-mensurável e

$$\text{vol}(C(f)) = \int_X f(x)dx.$$

Questão 2. Seja $f : U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1 definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se $a \in U$ é tal que $f'(a)$ é isomorfismo, prove que

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{\text{vol}(f(B(a; r)))}{\text{vol}(B(a; r))} = |\det f'(a)|.$$

Questão 3. Prove que o interior e o fecho de um conunto J-mensurável $X \subset \mathbb{R}^n$ são J-mensuráveis e $\text{vol} X = \text{vol}(\text{int}\, X) = \text{vol}\overline{X}$.

Questão 4. Se $f : A \to \mathbb{R}$ é integrável, onde $A \subset \mathbb{R}^n$ é um bloco n-dimensional, e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em um intervalo $[a, b]$ contendo $f(A)$, prove que $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ é integrável.

Questão 5. Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ um difeomorfismo tal que $f(B) \subset B$, onde B é a bola unitária fechada de $\mathbb{R}^m$, e $|\det f'(x)| < 1$ para todo $x \in B$. Prove que para toda função contínua $g : B \to \mathbb{R}$ tem-se

$$\lim_{k \to \infty} \int_{f^k(B)} g(x)dx = 0,$$

onde $f^k = f \circ \cdots \circ f$ (k fatores).

Questão 6. Prove que se $f_k : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é uma sequência de funções limitadas integráveis que converge uniformemente para f, então f é integrável e

$$\lim_{k \to \infty} \int_A f_k(x)dx = \int_A f(x)dx.$$

Questão 7. (EXTRA) Calcule

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \cos\left(\frac{\pi(i + j)}{2n}\right)$$