ALGUMAS OUTRAS SUBSTITUIÇÕES...

THIAGO LANDIM
ESCOLA OLÍMPICA

Conteúdo

One never goes so far as when one doesn't know where one is going.
Johann Wolfgang Von Goethe

O intuito desse artigo é apresentar substituições que não costumam ser apresentadas no curso de cálculo. É claro, algumas das integrais a serem apresentadas poderiam ter sido calculadas por substituição trigonométrica (embora talvez não da melhor forma possível), mas nós iremos apresentar essas substituições que irão simplificar as contas quando a substituição trigonométrica não parece a mais agradável. O leitor é convidado a resolver as integrais por substituição trigonométrica.

As integrais que podem ser resolvidas com essas substituições são da forma

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$$

onde R é uma função racional em x e $\sqrt{ax^2 + bx + c}$.

1. Substituições Hiperbólicas

Ao encontrarmos um integrando que possua $\sqrt{x^2 + a^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$ ou $\sqrt{a^2 - x^2}$, pensamos imediatamente em substituições trigonométricas ($x = a \tan\theta$, $x = a \sec\theta$ e $x = a \operatorname{sen}\theta$, resp.). Mas, embora a integral saia tranquilamente na terceira substituição, isso nem sempre é verdade nas duas primeiras. Propomos, aqui, as seguintes substituições:

$$x = \operatorname{senh} t$$

para o primeiro caso, e

$$x = \cosh t$$

para o segundo.

Mas, antes de irmos aos exemplos, é necessário estudarmos um pouco mais essas funções, para que saibamos suas propriedades, e, portanto, qual a simplicidade dessas substituições.

Por definição,

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

e sech, csch e coth são definidas analogamente.

Portanto, a seguinte identidade é verdadeira

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

assim como suas análogas com tangente hiperbólica e as outras funções.

Além disso,

$$\cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x = \cosh 2x$$

e

$$2 \operatorname{senh} x \operatorname{senh} x = \operatorname{senh} 2x$$

Pela definição, é fácil ver que

$$\int \cosh x \, dx = \operatorname{senh} x$$

$$\int \operatorname{senh} x \, dx = \cosh x$$

$$\int \tanh x \, dx = \log |\cosh x|$$

$$\int \coth x \, dx = \log |\operatorname{senh} x|$$

$$\int \operatorname{sech}^2 x \, dx = \tanh x$$

$$\int \operatorname{sech} x \tanh x \, dx = -\operatorname{sech} x$$

e outras fórmulas afins para as outras funções hiperbólicas.

Para fazermos a substituição, precisamos saber como recuperar a variável inicial, ou seja, as inversas das funções hiperbólicas. Resolvendo uma equação do segundo grau, ficamos com

$$\operatorname{senh}^{-1} x = \log(x + \sqrt{1+x^2})$$
$$\cosh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2-1})$$
$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}(\log(1+x) - \log(1-x))$$

onde x é tal que o lado direito está definido.

Vamos apresentar agora exemplos de como as funções hiperbólicas podem ser usadas para calcular integrais da forma citada.

Exemplo 1.

$$\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{15}(1+x^2)^{3/2}(3x^2-2)$$

Tomando $x = \operatorname{senh} t$, *ficamos com a integral*

$$\int \operatorname{senh}^3 t \cosh^2 t\, dt$$

E fazendo $u = \cosh t$, *temos* $du = \operatorname{senh} t\, dt$ *e a integral torna-se*

$$\int (u^2-1)u^2\,du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3}$$

$$= \frac{1}{15}\cosh^3 t(3\cosh^2 - 5) = \frac{1}{15}(1+x^2)^{3/2}(3x^2-2)$$

Exemplo 2.

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\log(x+\sqrt{x^2+a^2})$$

Tomando $x = a\operatorname{senh} t$, *teremos*

$$a^2\int \cosh^2 t\,dt$$

E, usando que

$$\cosh^2 t = \frac{\cosh 2t + 1}{2},$$

ficamos com

$$\frac{a^2}{2}\left(\int \cosh 2t\,dt + \int 1\,dt\right) =$$

$$\frac{a^2}{4}\left(\operatorname{senh} 2t + 2t\right) =$$

$$\frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\log(x+\sqrt{x^2+a^2})$$

onde aqui ignoramos $\frac{a^2}{2}\log a$, *pois é uma constante.*

Note que tal substituição é válida para toda a função $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$, pois basta fazermos a substituição $u = \sqrt{a}(x + \frac{b}{2a})$ para $\sqrt{ax^2+bx+c}$ tornar-se um dos três possíveis casos de substituição trigonométrica ou hiperbólica.

Temos o seguinte exemplo para mostrar o processo.

Exemplo 3.

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx =$$

onde $a > 0$ *e* $4ac > b^2$.

Tomando $u = \sqrt{a}(x + \frac{b}{2a})$, *ficamos com a integral*

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{1}{\sqrt{u^2+K}}\,du$$

onde $K = \frac{4ac-b^2}{4a} > 0$. *Então tomamos* $u = \sqrt{K}\,\mathrm{senh}\, t$, *e teremos*

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{a}}\int 1\,dt = \frac{1}{\sqrt{a}}t \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}}\log\left(\frac{u}{\sqrt{K}} + \sqrt{\frac{u^2}{K}+1}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}}\log\left(\sqrt{a}\Big(x+\frac{b}{2a}\Big) + \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\end{aligned}$$

onde aqui ignoramos $\frac{\log K}{2\sqrt{a}}$, *pois é uma constante.*

O leitor é convidado a calcular essa integral nos outros casos.

2. Substituições de Euler

A Substituição de Euler é um método algébrico de resolver integrais da forma $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ onde R é uma função racional. Nosso objetivo é substituir x por uma outra variável t de forma que R seja uma função racional em t, que sabemos como integrar.

Primeira substituição de Euler: Se $a > 0$, então tomamos

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t$$

No apêndice, comentaremos sobre o incentivo geométrico. A ideia algébrica é: se tomássemos apenas $\sqrt{ax^2+bx+c} = t$, teríamos que x, como função de t, possui raiz quadrada, então ainda não saberíamos como resolver. O problema dessa abordagem é que, para encontrarmos x em função de t, caímos numa equação do segundo grau. Desejamos, então, eliminar o ax^2, para que tenhamos $x = R_1(t)$.

De fato, com a primeira substituição de Euler, ficamos com

$$x = \frac{t^2 - c}{b \pm 2\sqrt{a}t}$$

e

$$dx = \frac{2tb \pm 2\sqrt{a}(c + t^2)}{(b \pm 2\sqrt{a}t)^2}\, dt$$

Além disso, $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ também é uma função racional de t, portanto sabemos como integrar tal função. A argumentação é análoga para as outras duas substituições.

Segunda substituição de Euler: Se $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$ com $\alpha \neq \beta$, fazemos

$$\sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)} = (x - \alpha)t$$

Daí segue que

$$x = \frac{\alpha t^2 - a\beta}{t^2 - a}$$

e

$$dx = \frac{2at(\beta - \alpha)}{(t^2 - a)^2}\, dt$$

Novamente, teremos uma função racional em t, que sabemos como integrar.

Terceira substituição de Euler: Se $c > 0$, então tomamos

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$$

Nesse caso, teremos que

$$x = \frac{b \pm 2\sqrt{c}t}{t^2 - a}$$

Exemplo 4.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1 - x)}}\, dx = \pi$$

Como o polinômio já está fatorado (e porque $a < 0$ e $c = 0$), usaremos a segunda substituição. Tomemos, então, $\sqrt{x(x - 1)} = xt$. daí segue que

$$x = \frac{1}{1 + t^2}$$

e que

$$dx = \frac{-2t}{(1 + t^2)^2}\, dt$$

Além disso, como

$$t = \sqrt{\frac{x - 1}{x}}$$

os novos limites de integração serão ∞ e 0. Logo, já usando o sinal para mudar a ordem de integração,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx &= \int_0^\infty \frac{\frac{2t}{(1+t^2)^2}}{\frac{t}{1+t^2}}\,dt\\ &= 2\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\,dt\\ &= \pi\end{aligned}$$

De modo geral, podemos usar esse método para calcular, sem muito algebrismo, integrais da forma

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,dx.$$

Entretanto, há um método mais simples de resolver integrais dessa forma particular que é fazendo a substituição:

$$x = (b-a)\operatorname{sen}^2\theta + a$$

.

Fica ao leitor o exercício de resolver a integral utilizando essa substituição.

Um exemplo semelhante ao anterior é o:

Exemplo 5.

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \pi.$$

Note que

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \int_{-1}^1 \frac{1+x}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}\,dx,$$

logo podemos usar a segunda substituição de Euler.

Tome $\sqrt{(1+x)(1-x)} = t(1+x)$. *Então*

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

e os limites de integração são ∞ e 0. Além disso,

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

e

$$dx = -\frac{4t}{(1+t^2)^2}\,dt.$$

Portanto

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx &= -\int_{\infty}^{0}\frac{1}{t}\frac{4t}{(1+t^2)^2}\,dt\\ &= 4\int_{0}^{\infty}\frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt.\end{aligned}$$

Tomando $t=\tan\theta,$ *e a integral torna-se*

$$\begin{aligned}4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta\\ &= \pi.\end{aligned}$$

Apêndice

A geometria da Substituição de Euler.
Note que $y^2 = ax^2 + bx + c$ descreve uma cônica e que podemos tomar tanto $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ quanto $y = -\sqrt{ax^2 + bx + c}$, pois uma função racional em um também o é no outro, e suponhamos, sem perda de generalidade, que $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$.

Queremos uma descrição dos pontos que seja bijetora e simples. Para tanto, fixe um par (u, v) da cônica (então temos que $v = \sqrt{au^2 + bu + c}$), e, para cada ponto (x, y) da cônica, existe uma única reta que cruza ambos os pares, que é descrita por

$$y - v = t(x - u)$$

onde t é o coeficiente angular da reta.

Escrevendo $y = t(x-u)+v$, e usando que $y^2 = ax^2+bx+c$ e que $v^2 = au^2+bu+c$, pode-se mostrar que x e y são funcionais racionais de t, e que, além disso, $dx = S(t)dt$, onde S é uma função racional, mas isso é uma conta entediante demais, e deixaremos para o leitor interessado. Aquele que quiser lê-lo pode conferir o [3].

O que ocorre se tomarmos algum par (u, v) especial?

Se tomarmos um ponto do eixo y, ou seja, tomando $u = 0$, então teremos $v = \sqrt{c}$, e

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt - \sqrt{c}$$

onde teríamos um $xt + \sqrt{c}$, se tivéssemos tomado $y = -\sqrt{ax^2 + bx + c}$. Temos, portanto, a terceira substituição de Euler.

Outra possibilidade interessante interessante, é tomar um ponto do eixo x, ou seja, tal que $v = 0$. Nesse caso, se $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$, tomamos $u = \alpha$, e teremos

$$\sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)} = t(x - \alpha)$$

que é a segunda substituição de Euler.

Bem, agora exaurimos os pontos interessantes. Como será que surge, então a primeira substituição de Euler?

Se $a > 0$, temos que a cônica é uma hipérbole, e $y = \pm x\sqrt{a}+t$ é uma função afim paralela a uma das assíntotas da hipérbole. Como a relação entre x e t dessa forma é biunívoca, e provamos no texto que essa substituição transforma o integrando numa função racional em t, sabemos agora tanto a ideia quanto a utilidade de fazermos essa substituição.

Referências

[1] Boyadzhiev, K. N.. *Hyperbolic Substitutions for Integrals*, August 2006. http://www2.onu.edu/~m-caragiu.1/bonus_files/HYPERSUB.pdf

[2] Boyadzhiev, K. N.. *Euler Substitutions*, August 2006. http://www2.onu.edu/~m-caragiu.1/bonus_files/EULER-SU.pdf

[3] Jordan, C.. *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, Tome 2, Gauthier-Villars, 1893.

[4] Nahin, P. J.. *Inside Interesting Integrals*, Springer, 2015.

[5] MIT Integration Bee Qualifying Exam 2016. http://www.mit.edu/~same/pdf/qualifying_round_2016_test.pdf

[6] MIT Integration Bee Qualifying Exam 2017. http://www.mit.edu/~same/pdf/qualifying_round_2017_test.pdf