PROBLEMAS DE TEORIA DOS NÚMEROS NA OBM-U E IMC

1. Problemas de Teoria dos Números na Primeira Fase da OBM-U

Problema 1 (P1, 1a fase, OBMU - 2013)**.** *Seja $P(x)$ um polinômio com coeficientes inteiros satisfazendo $P(n) = n$ para todo inteiro n com $1 \leq n \leq 6$ e $|P(0)| \leq 2013$. Determine quantos e quais são os possíveis valores de $P(0)$.*

Problema 2 (P4, 1a fase, OBMU - 2012)**.** *Sejam (x_n) e (y_n) duas sequências dadas por $x_1 = 2$, $y_1 = 2012$, $x_{n+1} = 2^{x_n}$ e $y_{n+1} = (y_n)!$, para todo $n \geq 1$.*

Determine o menor inteiro positivo k tal que $x_k > y_{2012}$.

Problema 3 (P2, 1a fase, OBMU - 2010)**.** *Quantos são os pares ordenados (x, y), com $x, y\{0, 1, 2 \cdots, 142\}$ tais que $5x^2 + 7y^2 - 1$ é múltiplo de 143.*

Problema 4 (P4, 1a fase, OBMU - 2009)**.** *Determine a quantidade de números inteiros positivos n menor ou iguais a $31!$ tais que $3^n + n$ é divisível por 31.*

Problema 5 (P1, 1a fase, OBMU - 2008)**.** *Determine todos os valores inteiros de n para os quais a equação $x^3 - 13x + n = 0$ possua três raízes inteiras.*

Problema 6 (P4, 1a fase, OBMU - 2007)**.** *Seja a um inteiro não nulo. Prove que se a é uma n-ésima potência módulo $4a^2$, ou seja, existe um inteiro b tal que $a - b^n$ é múltiplo de $4a^2$, então a é uma n-ésima potência.*

Problema 7 (P2, 1a fase, OBMU - 2005)**.** *Prove que existem pelo menos 2005 potências 27-ésimas distintas (isto é, números da forma n^{27}, com n inteiro positivo), todas com exatamente 2005 algarismos, tais que qualquer um pode ser obtida de qualquer outra a partir de uma permutação de seus algarismos.*

Problema 8 (P2, 1a fase, OBMU - 2001)**.** *Seja $s(n)$ a soma dos algarismos de n. Assim, por exemplo, $s(77) = 14$ e $s(2001) = 3$. Diga se existe um inteiro positivo n com $s(n) = 10$ e $s(n^2) = 100$. Se não existir, demonstre este fato. Se existir, dê um exemplo.*

2. Problemas de Teoria dos Números na Segunda Fase da OBM-U

Problema 9 (P2, 2a fase, OBMU - 2017). *Fixados os inteiros positivos a e b, mostre que o conjunto dos divisores primos dos termos da sequência*

$$a_n = a \cdot 2017^n + b \cdot 2016^n$$

é infinito.

Problema 10 (P3, 2a fase, OBMU - 2016). *Seja $k \geq 1$ um inteiro. Definimos a sequência $(a_n)_{n\geq 0}$ por $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ e*

$$a_{n+1} = ka_n + a_{n-1}$$

para $n = 1, 2, \cdots$. Seja p um número primo ímpar. Denote por $m(p)$ o menor inteiro positivo i tal que $p|a_i$. Denote por $T(p)$ o menor inteiro positivo tal que para qualquer natural j temos $p|a_{j+T(p)} - a_j$.

i) Mostre que $T(p) \leq m(p)(p-1)$.

ii) Se $T(p) = m(p)(p-1)$, mostre que

$$\prod_{1\leq j\leq T(p)-1 j\neq 0(\operatorname{mod} m(p))} a_j \equiv (-1)^{m(p)-1} (\operatorname{mod} p).$$

Problema 11 (P6, 2a fase, OBMU - 2010). *Prove que se $10^{2n} + 8 \cdot 10^n + 1$ tem um fator primo da forma $60k + 7$, então n e k são pares.*

Problema 12 (P3, 2a fase, OBMU - 2009). *Dados $n, a_1, a_2, \cdots, a_n$ inteiros positivos, definimos $q_0 = 1$, $q_1 = a_1$ e $q_{k+1} = a_{k+1}q_k + q_{k-1}$, para $1 \leq k \leq n-1$.*

Prove que, dado $c > 1$, existe $K > 0$ tal que, para todo $M > K$, existem n inteiro positivo e $a_1, a_2, \cdots, a_n$ pertencentes a $\{1, 2\}$ tais que $M \leq q_n < c \cdot M$.

Problema 13 (P2, 2a fase, OBMU - 2006). *Prove que, para todo inteiro $n \geq 2$, o número de matrizes quadradas 2×2 com entradas inteiras e pertencentes ao conjunto $\{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$ que têm determinante da forma $kn + 1$ para algum inteiro k é dado por*

$$n^3 \cdot \prod \left(1 - \frac{1}{p^2}\right),$$

aonde o produtório é tomado sobre todos os divisores primos de n.

Problema 14 (P4, 2a fase, OBMU - 2004). *Seja $\mathbb{Z}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n); x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{Z}\}$. Seja p um primo, k um inteiro positivo e $P_1, P_2, \cdots, P_k \in \mathbb{Z}^n$ tais que para todo j, $1 \leq j \leq k$, $\frac{P_j - Q}{p} \notin \mathbb{Z}^n$. Prove que existe um polinômio $f(x_1, \cdots, x_n)$ com coeficientes inteiros com $f(P_j) = 0$ para todo j, $1 \leq j \leq k$, e $\frac{f(Q)}{p} \notin \mathbb{Z}$.*

3. Problemas de Teoria dos Números na IMC

Problema 15 (P2, IMC - 2014). *Sejam m e n inteiros positivos primos entre si. Prove que*

$$\sum_{k=0}^{mn-1} (-1)^{\lfloor \frac{k}{m} \rfloor + \lfloor \frac{k}{n} \rfloor}$$

é igual a 0 se mn é par e é igual a 1 se mn é ímpar.

Problema 16 (P4, IMC - 2014). *Seja $n > 6$ um número perfeito, e seja $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$ a sua fatoração em primos com $1 < p_1 < \cdots < p_k$. Prove que e_1 é um número par.*

Um números n é perfeito se a soma de seus divisores é igual a $2n$.

Problema 17 (P4, IMC - 2014). *Existe um conjunto infinito M de inteiros positivos tal que para todos $a, b \in M$ com $a < b$, a soma $a + b$ é um inteiro livre de quadrados?*

(Um inteiro positivo é dito livre de quadrados se nenhum quadrado perfeito maior que 1 divide ele.)

Problema 18 (P3, IMC - 2012). *O conjunto dos inteiros positivos n tais que $n! + 1$ divide $(2012n)!$ é finito ou infinito?*

Problema 19 (P4, IMC - 2011). *Seja $f(x)$ um polinômio com coeficientes reais de grau n. Suponha que*

$$\frac{f(k) - f(m)}{k - m}$$

é um inteiro para todos inteiros $0 \leq k < m \leq n$. Prove que $a - b$ divide $f(a) - f(b)$ para todos inteiros a e b distintos.

Problema 20 (P4, IMC - 2011). *Seja p um número primo. Um inteiro positivo n é dito interessante se*

$$x^n - 1 = (x^p - x + 1)f(x) + pg(x)$$

para algum par de polinômios f e g com coeficientes inteiros.

a) Prove que o número $p^p - 1$ é interessante.

b) Para quais p, $p^p - 1$ é o menor número interessante?

Dica: Trabalhe com congruências módulo $x^p - x + 1$ no anel de polinômios $\mathbb{Z}_p[x]$.

Problema 21 (P4, IMC - 2010). *Sejam a e b inteiros e suponha que existe um inteiro positivo n para o qual o conjunto*

$$\mathbb{Z} \setminus \{ax^n + by^n, x, y \in \mathbb{Z}\}$$

é finito. Prove que $n = 1$.

Problema 22 (P4, IMC - 2009). *Seja p um número primo e $\mathbb{Z}_p$ o corpo dos resíduos módulo p. Seja W o menor conjunto de polinômios com coeficientes em $\mathbb{Z}_p$ tal que:*

a) Os polinômios $x+1$ e $x^{p-2}+x^{p-3}+\cdots+x^2+2x+1$ estão em W, e

b) Para todo par de polinômios $h_1(x)$ e $h_2(x)$ em W, o polinômio $r(x)$, que é o resto de $h_1(h_2(x))$ módulo x^p-x, também está em W.

Quantos polinômios estão em W?

Problema 23 (P3, IMC - 2008). *Seja n um inteiro positivo. Prove que 2^{n-1} divide*

$$\sum_{0\leq k<n/2}\binom{n}{2k+1}5^k.$$

Problema 24 (P3, IMC - 2008). *Seja p um polinômio com coeficientes inteiros e sejam $a_1<a_2<\cdots<a_k$ inteiros.*

a) Prove que existe $a\in\mathbb{Z}$ tal que $p(a_i)$ divide $p(a)$ para todo $i=1,2,\cdots,k$.

b) Existe um inteiro $a\in\mathbb{Z}$ tal que o produto $p(a_1)p(a_2)\cdots p(a_k)$ divide $p(a)$?

Problema 25 (P2, IMC - 2007). *Sejam x,y,z inteiros tais que $S=x^4+y^4+z^4$ é divisível por 29. Mostre que S é divisível por 29^4.*

Problema 26 (P1, IMC - 2007). *Seja f um polinômio de grau 2 com coeficientes inteiros. Suponha que $f(k)$ é divisível por 5 para todo inteiro k. Prove que todos os coeficientes de f são divisíveis por 5.*

Problema 27 (P2, IMC - 2006). *Encontre o número de inteiros positivos x que satisfazem as seguintes duas condições:*

a) $x<10^{2006}$;

b) x^2-x é divisível por 10^{2006}.

Problema 28 (P5, IMC - 2006). *Prove que existem infinitos pares de inteiros positivos primos entre si (m,n) tais que a equação*

$$(x+m)^3=nx$$

tem 3 raízes inteiras distintas.