# Treinamento OBMU - I

Samuel Feitosa

## Sequências e Séries

**Problema 1.** A sequência $x_n$ é definida por $x_0 = 2$, $x_1 = 7$ e $x_{n+1} = 7x_n - 12x_{n-1}$. Encontra uma expressãofechada para $x_n$.

**Problema 2.** A sequência $a_n$ é definida por $a_0 = 0$ e $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$. Encontre $\lim_{n\to\infty} a_n$.

**Problema 3.** (IMC 2011) Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência com $\frac{1}{2} < a_n < 1$ para todo $n \geq 0$. Defina a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por $x_0 = a_0$, $x_{n+1} = \dfrac{a_{n+1} + x_n}{1 + a_{n+1}x_n}$, para $n \geq 0$. Determine $\lim_{n\to\infty} x_n$.

**Problema 4.** Seja $a_n = \dfrac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \dfrac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdot \dfrac{4^3 - 1}{4^3 + 1} \cdot \ldots \cdot \dfrac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$. Encontre $\lim_{n\to\infty} a_n$.

**Problema 5.** Encontre o valor de:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)}.$$

**Problema 6.** Encontre o valor de:

$$\sum_{i=1}^{\infty} 3^{n-1} \sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right).$$

**Problema 7.** (OBMU 2011) Encontre o valor de

$$\sum_{m\geq 0}\sum_{n\geq 0} \frac{min\{m,n\}}{3^{m+n}}.$$

## Sequências de inteiros

**Problema 8.** Prove que, para todo natural $n$ temos:

$$3 \mid \left\lfloor \left(\frac{7+\sqrt{37}}{2}\right)^n \right\rfloor.$$

**Problema 9.** Prove que para todo inteiro positivo $k$ , a parte interia do número $(7 + 4\sqrt{3})^k$ é ímpar.

**Problema 10.** (Olimpíada Iraniana) Mostre que, $k^n - \lfloor k^n \rfloor = 1 - \dfrac{1}{k^n}$ onde $k = 2 + \sqrt{3}$.

**Problema 11.** Encontre a maior potência de 2 que divide

$$\lfloor (3+\sqrt{11}))^{2n+11} \rfloor.$$

**Problema 12.** (Hungria 2000) Se $A = (1000 + \sqrt{1000^2 + 1})^{1000}$, determine o 2000-ésimo algarismo após a vírgula de sua representação decimal.

**Problema 13.** Prove que para todo inteiro $m > 2$ existe um irracional $r$ que depende de $m$, tal que $\lfloor r^k \rfloor \equiv -1 (\mod m)$.

**Problema 14.** Considere a sequêcica de reais positivos $a_1, a_2, ...$, tal que $a_1 = 1$ $a_n = a_{n+1} + a_{n+2}$, para todo inteiro $n > 0$. Prove que o dígito das unidades de $\dfrac{1}{a_i}$ não pode ser 0,3,5 ou 8 para todo $i \in \mathbb{N}$.

**Problema 15.** (Seletiva do Brasil para a IMO-2001) Encontre todos os naturais $n$ tais que $\alpha^n - n^2\alpha$ é um inteiro onde $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

**Problema 16.** (Revista Eureka) Seja $\alpha$ a maior raiz da equação $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$. Prove que $\lfloor \alpha^{2004} \rfloor$ é divisível por 17.