Treinamento OBMU - II

Samuel Feitosa

Funções Contínuas

Problema 1. (Leningrado) Uma função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e $F(x) \cdot F(F(x)) = 1$ para todo x real. Sabendo que $F(1000) = 999$, encontre $F(500)$.

Problema 2. (Leningrado) Uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz a igualdade $f(x+f(x)) = f(x)$ pata todo x real. Prove que f é constante.

Problema 3. (Putnam) Seja $f(x)$ contínua tal que $f(2x^2-1) = 2xf(x)$ para todo x Mostre que $f(x) = 0$ para $-1 \leq x \leq 1$.

O Teorema Fundamental do Cálculo

Problema 4. (Leningrado) Dado um polinômio $P(x)$ com coeficientes reais, prove que se $P(x) - P'(x) - P''(x) + P'''(x) \geq 0$ para todo x, então $P(x)$ é sempre não negativo.

Problema 5. (OBMU) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função integrável e crescente. Prove que:

$$\int_0^1 xf(x)dx \geq \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)$$

Problema 6. (OBMU) Sejam f e g funções contínuas distintas de $[0, 1$ em $(0, +\infty)$ tais que

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx.$$

Para $n \geq 0$, seja $y_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)^{n+1}}{g(x)^n}dx$. Prove que $(y_n)_{n\geq 0}$ é uma sequência crescente e divergente.

Problema 7. (OBMU) Calcule a integral:

$$\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)dx.$$

Problema 8. (OBMU) Calcule

$$\int_{-1}^1 \frac{e^x - 1 - x}{(e^x-1)x}dx.$$

Problema 9. (OBMU) Prove que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = \int_0^1 x^{-x}dx.$$

Problema 10. Dada $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty])$, duas vezes diferenciável com $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $1+f(x) = \dfrac{1}{f''(x)}$, para todo $x \in [0, 1]$, mostre que $f(1) < \dfrac{3}{2}$.

Problema 11. (Putnam) Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com derivada contínua, tais que:

$$f(x)^2 = \int_0^x (f(t)^2 + f'(t)^2)dt + 1990.$$

Problema 12. (Putnam) Seja f uma função real com terceira derivada contínua e tal que $f(x), f'(x), f''(x), f'''(x)$ são positivas para todo x. Suponha que $f'''(x) \leq f(x)$ para todo x. Mostre que $f'(x) < 2f(x)$ para todo x.

Sequências

Problema 13. (OBMU) Considere a sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ dada por $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n^{2005}}$, para todo $n \geq 1$. Prove que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{na_n}$ converge.

Limites e Derivadas

Problema 14. Suponha que $f : (0, \infty) \to$ é contínua e tal que $f(x) \leq f(nx)$ para todo natural n e todo real $x > 0$. Mostre que existe $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ (podendo o limite ser infinito).

Problema 15. (OBMU) As funções $y_1(t) = (1+t^2)e^{t^2}$, $y_2(t) = (1+t^2)e^{t^2}$, $y_3(t) = (-1-t+t^2)e^{t^3}$ são soluç oes da equação diferencial $y''(x) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$, onde $a(t), b(t)$ e $c(t)$ são funções duas vezes diferenciáveis. Determine uma função duas vezes diferenciável $y(t)$ tal que $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$ com $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.