UTILIZAÇÃO DO PROJETO DE SEGUNDA ORDEM PARA GARANTIR A QUALIDADE GEOMÉTRICA DE UMA REDE GEODÉSICA BIDIMENSIONAL

Quintino Dalmolin[1]
Reginaldo de Oliveira[2]

[1] Universidade Federal do Paraná - UFPR - Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas- qdalmolin@ufpr.br ;

[2] Colégio Estadual Dr. Munhoz da Rocha - reoliveira@ig.com.br

RESUMO

Neste trabalho objetiva-se a aplicação do planejamento de segunda ordem em redes geodésicas sob o ponto de vista espectral e apresentar os conceitos teóricos que possibilitam a aplicação do problema de valor próprio inverso na obtenção dos pesos quando se especifica a precisão final da rede. Apresentam-se as possibilidades observacionais e a precisão necessária de cada uma destas observações para se atingir uma precisão pré-estabelecida em uma rede, quando a geometria e a precisão final da mesma são fixadas. Um exemplo, aplicado a uma rede de coordenadas horizontais que associa peso à variância da observação e as possibilidades de diferentes formas geométricas para se efetivar o levantamento a fim de alcançar a precisão desejada com os critérios de otimização é apresentado, e ainda os resultados são discutidos.

Palavras Chave: Planejamento de Segunda Ordem, Otimização de Pesos, Qualidade Geométrica de uma Rede

USING A SECOND ORDER DESIGN TO ENHANCE A GEOMETRIC QUALITY OF A BIDIMENSIONAL GEODETIC NETWORK

ABSTRACT

In this application of second order design is aimed at geodesic networks under the spectral approach. When it is specified the final precision of the theoretical concepts, that makes possible the application of the inverse eigenvalue problem in the weights determination. In the case of the fixed geometry and final precision, the observational possibilities and necessary precision for each observation to reach a precision constraint in a network are presented. In an applied instances, weights are associated to the observational variances of the network horizontal coordinates. In order to reach the aimed precision with the optimization criteria, in different geometric configurations, the possibilities of surveying execution are presented and the results are discussed.

Keywords: *Second Order Desing, Weights Optimization, Geodesic Quality of a network.*

1.INTRODUÇÃO

Uma rede geodésica é constituída por um conjunto de pontos materializados no terreno, com suas posições referenciadas a um sistema de coordenadas. Sua determinação é feita por meio de medições geodésicas (de ângulos, de direções, de distâncias, da diferença de níveis associada à observações gravimétricas ou à observações GPS) que envolvem estes pontos. Antes de se efetuar qualquer medição para o estabelecimento da rede, esta pode ser projetada com o intuito de minimizar possíveis falhas que possam a ocorrer nos valores ajustados finais. A importância do projeto de uma rede está vinculada à precisão dos parâmetros calculados através das medidas efetuadas.

O Projeto de Segunda Ordem em redes geodésicas é definido como o problema de determinar a precisão ótima das observações de acordo com os requerimentos ótimos da rede (SCHMITT, 1985, p. 6).

De acordo com KUANG (1996, p.195), o primeiro passo para estabelecer uma rede geodésica é o planejamento da mesma. Um planejamento otimizado é compreendido em termos gerais como o planejamento da configuração e do plano de observações, os quais devem satisfazer a um conjunto de critérios ótimos. As técnicas de otimização de pesos servem para ajudar a tomar decisões como, por exemplo, instrumentos que podem ser selecionados dentre os modelos disponíveis, onde eles podem ser posicionados e como a rede pode ser concebida com o intuito de estimar os parâmetros incógnitos e ainda apresentar a qualidade desejada.

Uma das possibilidades de se obter pesos otimizados, é o uso dos valores próprios associados à matriz dos cofatores de covariância dos parâmetros ajustados, em termos de Componentes Principais, os quais possuem informações sobre a qualidade da rede. A idéia é estabelecer valores próprios que conduzam a matriz de covariâncias à apresentação de uma estrutura ideal e de forma que possua os valores próprios requeridos.

No modelo de Gauss-Markov, (RAO e MITRA, 1971, p. 136) os parâmetros estimados através do Método dos Mínimos Quadrados se baseiam nos seguintes modelos matemáticos:

$$\mathbf{V} = \mathbf{AX} + \mathbf{L} \tag{1}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}_{\lambda}^{-1} = \sigma_0^2 \mathbf{C}_{\lambda}^{-1} \tag{2}$$

onde,

V, representa o vetor dos resíduos;

A, a matriz planejamento;

P, a matriz dos pesos das observações;

$\mathbf{Q}_{\lambda}^{-1}$, a matriz cofatora das observações;

σ_0^2, o fator de variância a priori e;

$\mathbf{C}_{\lambda}$, a matriz de covariâncias das observações, assumindo que as mesmas são não correlacionadas. Neste caso, $\mathbf{C}_{\lambda}$ se degenera em uma matriz diagonal contendo somente variâncias.

A aplicação do ajustamento pelo Método dos Mínimos Quadrados na forma paramétrica possibilita calcular quantidades indiretamente, se estas se vinculam matematicamente a outras medidas obtidas de forma direta. Os parâmetros representam incógnitas funcionais e são tratados como variáveis aleatórias.

Através da lei de propagação de covariâncias (DALMOLIN, 2002, p.56), obtém-se a matriz de covariâncias dos parâmetros estimados, que para o caso geral é expressa por

$$\Sigma_{x_a} = \sigma_0^2 \left(\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A}\right)^+ = \sigma_0^2 \mathbf{N}^+ = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_x \tag{3}$$

onde $\mathbf{N} = \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A}$ é a matriz dos coeficientes das equações normais.

De forma geral, uma rede geodésica concebida sem um planejamento, não possui controle sobre a precisão dos parâmetros estimados, ou seja, não há garantias que a precisão final dos parâmetros atenda à precisão pré-definida. Além disto, mais observações que o necessário para atender os objetivos podem ser realizadas, inclusive sob um plano de configuração geométrica inadequado e com equipamentos superdimensionados em sua precisão. Isto onera demasiadamente o projeto e em certas circunstâncias pode até inviabilizá-lo. Deve-se ainda levar em consideração o efeito "smearing" do MMQ em que nem todas as observações podem cooperar para a precisão final.

Melhorar o conhecimento sobre a rede antes mesmo de ela ser concebida é o objetivo do planejamento de segunda ordem, o qual fornece informações à cerca do trabalho a ser realizado de tal forma que seja possível projetar e conceber melhor a rede.

Observando (3) tem-se que fixado a geometria da rede, ou seja, a matriz planejamento **A** a influência na precisão dos parâmetros estimados recaí sobre a matriz dos pesos, que reflete a precisão da observação, ver equação (2).

No caso particular em que $\sigma_0^2 = 1$, caso que é assumido no estágio de planejamento de uma rede geodésica (KUANG, 1996, p. 221), a relação (2) torna-se

$$\mathbf{P} = \mathbf{C}_\lambda^{-1} \tag{4}$$

ou seja, o peso dado a cada observação é o inverso da variância da observação.

Projetar uma rede em termos de precisão, é em linhas gerais definir a precisão final da mesma, calculando-se os pesos das observações que atendam a esta finalidade. A precisão limite para a observação é dada pelo inverso dos pesos otimizados como expressa a relação (4). Entende-se como precisão limite, aquela em que qualquer observação efetuada com uma precisão melhor ou igual a indicada pelo processo de otimização dos pesos, conduz a uma precisão melhor ou igual a planejada. Em outras palavras, o peso otimizado indica a precisão que a observação deve ser mensurada para o ajustamento final.

2.OTIMIZAÇÃO DOS PESOS DAS OBSERVAÇÕES GEODÉSICAS PELO PROBLEMA DE VALOR PRÓPRIO INVERSO.

A otimização espectral, ou otimização através de um problema de valor próprio inverso inclui de forma geral vetor próprio e valor próprio. O objetivo principal de um problema de valor próprio inverso é a determinação de um conjunto de valores próprios com grandezas pré-definidas.

2.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE VALOR PRÓPRIO INVERSO APLICADO NA OTIMIZAÇÃO DOS PESOS DAS OBSERVAÇÕES GEODÉSICAS

Seja $\mathbf{N}(\mathbf{p})$ uma matriz de dimensão $u \times u$, real e simétrica, cujos elementos são funções do vetor $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \Lambda & p_j & \Lambda & p_n \end{bmatrix}^t$, onde p_j é o peso atribuído a j-ésima observação. Tem-se como valores próprios e vetores próprios de $\mathbf{N}(\mathbf{p})$ $\lambda(\mathbf{p}) = [\lambda_1(\mathbf{p}) \quad \lambda_2(\mathbf{p}) \quad \Lambda \quad \lambda_i(\mathbf{p}) \quad \Lambda \quad \lambda_u(\mathbf{p})]^t$ e $\mathbf{m}_1(\mathbf{p}),\ \mathbf{m}_2(\mathbf{p}), \mathrm{K}\ , \mathbf{m}_u(\mathbf{p})$ respectivamente. O problema consiste em determinar o vetor **p** tal que a matriz $\mathbf{N}(\mathbf{p})$ apresente valores próprios pretendidos $\lambda^* = \begin{bmatrix} \lambda_1^* & \lambda_2^* & \Lambda & \lambda_i^* & \Lambda & \lambda_u^* \end{bmatrix}$.

Para determinar o vetor de pesos **p** que conduz (1) a ter os valores próprios pretendidos tem-se a seguinte situação: em geral devem existir pesos **p** tais que

$$F(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \lambda_1(\mathbf{p}) - \lambda_1^* \\ \lambda_2(\mathbf{p}) - \lambda_2^* \\ \mathrm{M} \\ \lambda_i(\mathbf{p}) - \lambda_i^* \\ \mathrm{M} \\ \lambda_u(\mathbf{p}) - \lambda_u^* \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \tag{5}$$

Devido a não linearidade de (5) uma solução pode ser obtida iterativamente através do método de Newton.

A linearização é baseada na decomposição espectral (SCHMITT, 1997, p.59).

$$\mathbf{M}^t(\mathbf{P})\mathbf{N}(\mathbf{P})\mathbf{M}(\mathbf{P}) = \Lambda \tag{6}$$

onde Λ matriz diagonal contendo valores próprios e $\mathbf{M}(\mathbf{P})$ e $\mathbf{N}(\mathbf{P})$ indicam respectivamente a matriz modal, ou seja, a matriz cujas colunas são vetores próprios e a matriz dos coeficientes das equações normais obtidas em função da matriz dos pesos.

A formação da matriz Jacobiana, para utilização do método de Newton, de $\mathbf{F}(\mathbf{p})$ requer a diferenciação da (5) em relação a p_j.

A derivada parcial do i-ésimo valor próprio em relação ao j-ésimo peso é

$$\lambda_{i,j} = \mathbf{m}_i^t(\mathbf{p}) \frac{\partial \mathbf{N}(\mathbf{p})}{\partial p_j} \mathbf{m}_i(\mathbf{p}) \tag{7}$$

e considerando

$$\mathbf{N}(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^{n} p_j \mathbf{a}_j \mathbf{a}_j^t \tag{8}$$

obtém-se

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial p_j} = \left[\mathbf{m}_i^t(\mathbf{p})\mathbf{a}_j \right]^2 \qquad i = 1, 2, \ldots, u \quad \text{e} \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{9}$$

$\mathbf{a}_j$ representa a j-ésima linha da matriz **A** escrita como vetor coluna. A (7) designa uma otimização pura dos pesos, onde se obtém a precisão da observação sem mudança da configuração geométrica da rede.

Uma iteração do método de Newton consiste nos passos seguintes:

1) Escolha do vetor inicial $\mathbf{p}^0$, cálculo de $\mathbf{N}(\mathbf{p}^0)$ e os valores próprios e vetores próprios correspondentes.

   Para $k = 0, 1, 2, \ldots$

2) Formação de $\mathbf{J}(\mathbf{p}_k)$ (ver 7) , $\mathbf{F}(\mathbf{p}_k)$ (ver 5) e obter $\mathbf{dp}_k$ solucionando o sistema

   $$[\mathbf{J}(\mathbf{p}_k)]\mathbf{dp}_k = \mathbf{d\lambda}$$

   onde $d\lambda_i = \lambda_i^* - \lambda_i^k$, $dp_i = p_i^{k+1} - p_i^k$.

   A fim de obter os pesos no k-ésimo passo da iteração faz-se $\mathbf{p}^{k+1} = \mathbf{p}^k + \mathbf{dp}^k$ e k representa o passo da iteração.

3) Cálculo de $\mathbf{N}(\mathbf{p}_k), \lambda_i(\mathbf{p}_k)$ e $\mathbf{m}_i(\mathbf{p}_k)$ e voltar ao passo 2

4) Como critério de parada tem-se:

   Se $\left\| \lambda(\mathbf{p}_k) - \lambda^* \right\| = \left\| d\lambda(\mathbf{p}_k) \right\| \leq \varepsilon$ pára o processo iterativo, onde ε representa a qualidade da aproximação, dado em um critério de parada estabelecido e $\| \bullet \|$ é a norma de um vetor qualquer.

Para outras informações com respeito à otimização dos pesos com base em valor próprio inverso consultar, por exemplo, OLIVEIRA (2003).

3.CONDIÇÕES SOBRE OS VALORES PRÓPRIOS NA OTIMIZAÇÃO DOS PESOS EM REDES GEODÉSICAS

As informações a respeito da precisão de uma rede geodésica estão contidas na matriz de covariâncias dos parâmetros estimados. Todas as modificações na geometria da rede e na precisão das observações agem diretamente sobre (3), desta forma os critérios de análise recaem sobre esta matriz.

O valor próprio máximo é de interesse particular, pois este permite obter informação sobre uma precisão limite para quaisquer grandezas estimadas a partir da rede (NINKOV e SCHMITT, 1983, p. 217). Para uma função y das coordenadas, após linearização pela expansão de Taylor vale,

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}^t\mathbf{x} \tag{10}$$

e para a sua variância após aplicação da lei de propagação de covariâncias tem-se

$$\sigma_{\mathbf{y}}^2 = \sigma_0^2 \mathbf{f}^t \mathbf{Q}_x \mathbf{f} \, . \tag{11}$$

Com o auxilio do Quociente Rayleigh (WANG e CHOW, 1994, p. 38) é obtida uma estimativa para $\sigma_{\mathbf{y}}^2$ pela expressão

$$\mathbf{f}^t\mathbf{f}\lambda_{\min} \leq \sigma_{\mathbf{y}}^2 \leq \mathbf{f}^t\mathbf{f}\lambda_{\max} \tag{12}$$

com $\lambda_{\max}$ e $\lambda_{\min}$ obtidos de (3).

De (12) decorre a exigência que o valor próprio máximo deve ser mínimo. Quanto maior for um valor próprio, comparativamente em relação aos outros elementos do espectro, mais desfavorável e não homogêneo será o comportamento da precisão.

Com o problema de valor próprio inverso aplicado à otimização dos pesos, quer-se garantir que qualquer desvio padrão estimado a partir da rede não cruze um valor limite pretendido, com isso o valor próprio máximo da matriz cofatora $\mathbf{Q}_x$ é determinado como um valor limite $\lambda_{\max}^*$ (valor próprio máximo pretendido), o qual se torna o objetivo no processo de otimização dos pesos.

Com a definição de um valor limite superior para a precisão dos parâmetros tem-se o valor próprio máximo para a matriz dos cofatores de covariâncias.

Visto que **N** e $\mathbf{Q}_x$ apresentam valores próprios recíprocos entre si, vale com respeito ao valor próprio λ_i de **N** e μ_i de $\mathbf{Q}_x$ a relação

$$\lambda_i = \frac{1}{\mu_i} \quad \text{com } \mu_i \neq 0 \text{ e } i = 1, 2, \ldots, u \tag{13}$$

onde u é o número de parâmetros.

Com isso há a possibilidade de ser formulada a otimização relativa à matriz das equações normais **N**. Com base em (13) verifica-se que um aumento no valor próprio λ_i de **N** corresponde a um decréscimo no valor próprio μ_i de $\mathbf{Q}_x$, ou seja, para μ_i tendendo para seu valor máximo tem-se λ_i tendendo para seu valor mínimo. Todo o processo aplicado para a obtenção dos valores próprios pretendidos é efetuado sobre a matriz dos coeficientes das equações normais. Então definido o valor limite para a precisão dos parâmetros $\mu_{\max}$ obtém-se os valores próprios para a matriz **N** através da relação (13).

4.EXEMPLIFICAÇÃO NUMÉRICA

No experimento a seguir, analisar-se-á a variação nos pesos, e conseqüentemente a precisão no planejamento de uma rede geodésica em função das várias possibilidades observacionais que a geometria da rede propicia. Considere a figura abaixo no plano bidimensional. Os pontos A e B são fixos. O ponto R deve ser obtido com um erro máximo de 3mm ($\sigma_{\text{máx}} = 3\ \text{mm}$). Um conjunto de quatro observações está disponível (2 distâncias e 2 de ângulos). Analisar-se-á o comportamento dos pesos para cada observação diante da variação da geometria do levantamento, combinando-se as várias possibilidades com respeito às observações empregando o MMQ em sua forma paramétrica.

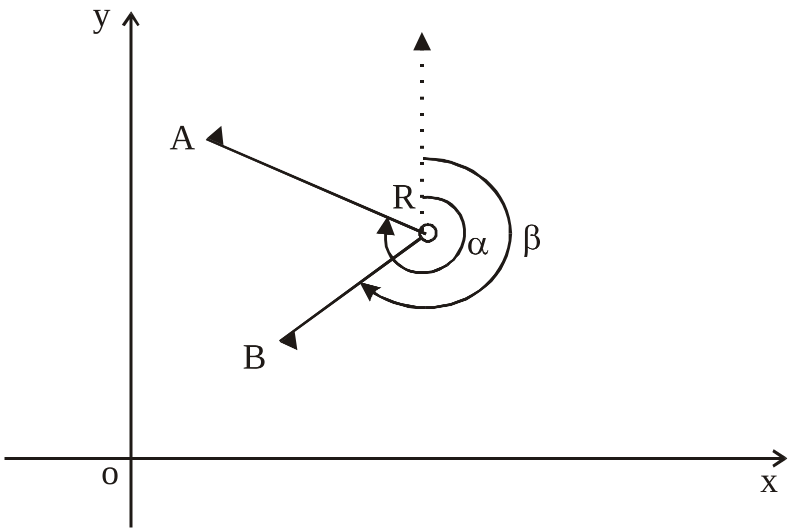

Figura 1- Representação Geométrica do Levantamento

As possibilidades de efetivar o levantamento, segundo o planejamento, varia desde 1 até 2 graus de liberdade.

Com um grau de liberdade as possibilidades observacionais para o levantamento é dado por C_4^3, ou seja, 4 diferentes possibilidades de configuração geométrica para a rede, e para 2 graus de liberdade essas possibilidades são dadas por C_4^4, ou seja uma forma geométrica para a rede. Com isso tem-se 5 projetos distintos para a obtenção do ponto R. Cada projeto é dependente das observações que serão feitas. Dentre os 5 projetos pode-se escolher o mais econômico em termos de precisão instrumental ou em termos de quantidade de observações.

As coordenadas dos pontos fixos e as coordenadas aproximadas para o ponto R estão expostos na tabela 1.

Tabela 1 – Coordenadas Fixas e Aproximadas

Ponto fixo	**Coordenadas fixas**	
	x (metros)	y (metros)
A	100	450
B	250	200
Ponto a determinar	**Coordenadas aproximadas**	
R	520	370

Cada tabela abaixo apresenta um planejamento para o cálculo do ponto R com base na configuração geométrica da rede, na precisão pré-fixada, seus respectivos pesos e precisões obtidas no processo de otimização. A mesma precisão para os parâmetros foi utilizada em todos os projetos com a finalidade de verificar a variação nos pesos em cada situação.

1º Projeto:

TABELA 1 - Observações Planejadas: Distâncias AR, BR e os Ângulos α e β.

observação	peso
AR	-33205,5111
BR	135348,3633
α	37888032,6851
β	17179869184,0

Neste projeto a otimização forneceu o peso da distância AR, um valor negativo, significando que esta observação não coopera para a precisão final da rede. Com base nesta afirmação refez-se o processo de otimização, baseando-se nos graus de liberdade, retirando a observação AR do conjunto de observações planejadas.

O resultado é apresentado na tabela 2

2º Projeto:

TABELA 2 - Observações Planejadas: Ângulos α, β e a Distância BR.

observação	peso	Precisão
α	48889,3880	$\leq$ 932,862924"
β	11311096539,0093	$\leq$ 0.00054"
BR	159999,8757	$\leq$ 2,5 mm

Neste projeto não houve uma distribuição homogênea para os pesos, a precisão requerida para o ângulo β, é aproximadamente nula, ou seja, considerada não realizável na prática. Com isto, diante da geometria da rede outro projeto para a rede foi estabelecido, os resultados obtidos com o processo de otimização estão expostos na tabela 3.

3º Projeto:

TABELA 3 - Observações Planejadas: Distâncias AR, BR e o Ângulo β.

observação	peso	precisão
AR	33412,8675	$\leq$ 5,47 mm
BR	135555,3914	$\leq$ 2,71mm
β	10398142355,327	$\leq$ 2,02"

Neste projeto observa-se que é suficiente as observações AR e BR serem feitas com uma precisão máxima de 2,71 mm e o ângulo β com uma precisão de 2,02 segundos para se alcançar a precisão requerida para os parâmetros ($\sigma_{\text{máx}} = 3 \text{ mm}$).

Os projetos contendo as outras duas possibilidades observacionais para a rede em questão, com 1 grau de liberdade não conduzirão a pesos satisfatórios e foram descartados da análise. Considerando quantidade de observações e precisão para as medidas observadas concluiu-se que a melhor forma de obter as coordenadas do ponto R, é apresentado pelo projeto 3.

5. CONCLUSÃO

Um dos principais objetivos do planejamento de segunda ordem em redes geodésicas é a obtenção da precisão instrumental, a fim de alcançar uma precisão pré-definida para os parâmetros. Neste campo, a otimização dos pesos com base em valor próprio, pode ser utilizada para que os objetivos quanto ao requerimento final da precisão de uma rede geodésica sejam alcançados. Os experimentos realizados mostram que diante da disponibilidade de projetos geométricos distintos para o levantamento pode-se escolher aquele que torna o levantamento menos oneroso do ponto de vista das quantidades de observações ou precisão instrumental. Os instrumentos podem ser selecionados com base nas precisões fornecidas pelos pesos, visto que a precisão final para os parâmetros é constante e pré-estabelecida.

6. REFERÊNCIAS

DALMOLIN, Q. **Ajustamento por Mínimos Quadrados**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 2002, 176p.

KUANG, S. **Geodetic network analysis and optimal design**: concepts and applications. Chelsea: Ann Arbor Press. 1996

NINKOV, T. ; SCHMITT, G. Eine Methode Gewichtsoptimierung in geodätischen Netzen. **Allgemeine Vermessungs-Nachrichten**, Karlsruhe, v. 90, n. 6 , 1983, p. 216-222.

OLIVEIRA, R. (2003). **Otimização dos pesos das observações geodésicas pelo problema de valor próprio inverso**. Curitiba, 2003. Dissertação de Mestrado. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná, 95 pp.

RAO, C. R. ; MITRA, S. K. **Generalized inverse of matrices and its applications.** New York. J. Wiley, 1971.

SCHMITT, G. Spectral analysis and optimization of two dimensional networks. **Geomatics Research Australasia.** n. 67, 1997, p. 47-64.

WANG, S.-G.;CHOW, S.-C. **Advanced linear models**: theory and applications. New York: M. Dekker, 1994.