

# RELACIONAMENTO ENTRE REFERENCIAIS LOCAIS E REFERENCIAIS GLOBAIS: PROBLEMA PROCRUSTES SIMPLES

Maria Aparecida Zehnpfennig Zanetti<sup>1</sup>  
Sílvio Rogério Correia de Freitas<sup>2</sup>  
Luís Augusto Koenig Veiga<sup>3</sup>

1 Universidade Federal do Paraná – UFPR - Curso de Pós Graduação em Ciências Geodésicas - [mazz@ufpr.br](mailto:mazz@ufpr.br)

2 Universidade Federal do Paraná – UFPR - Curso de Pós Graduação em Ciências Geodésicas - [sfreitas@ufpr.br](mailto:sfreitas@ufpr.br)

3 Universidade Federal do Paraná – UFPR- Curso de Pós Graduação em Ciências Geodésicas - [kngveiga@ufpr.br](mailto:kngveiga@ufpr.br)

## RESUMO

A transformação de coordenadas no sistema astronômico local em coordenadas no sistema global geocêntrico (**ITRFyy**, por exemplo) é um problema chave da Geodésia contemporânea, também chamado de problema da orientação tridimensional, que pode ser resolvido pela integração entre métodos **GPS** (**Global Positioning System**) e métodos **LPS** (**Local Positioning System**) através da resseção tridimensional. Este artigo apresenta uma revisão conceitual sobre sistemas de referência, sistema global, coordenadas astronômicas, sistema astronômico local, sistema de coordenadas geodésicas ou elipsóidicas, coordenadas geodésicas ou elipsóidicas e desvio da vertical. Mostra-se a definição e o modelo do Problema Procrustes simples que permite o cálculo das componentes do desvio da vertical através de medidas de posicionamento **GPS**, em uma estação base e em estações alvo, e medidas de direção **LPS** (direção horizontal e direção vertical com teodolito) da estação base para as estações alvo.

**Palavras-chave:** Referenciais Locais e Globais, Problema Procrustes Simples, Desvio da Vertical.

## ***RELATION BETWEEN LOCAL REFERENCIALS AND GLOBAL REFERENCIALS: PROBLEM PROCRUSTES SIMPLE***

### **ABSTRACT**

*The transformation of local astronomical coordinate system in coordinates in the global geocentric geodetic system (ITRFyy, for instance) it is a key problem of contemporary Geodesy, also called the problem of the three-dimensional orientation, that can be solved by the integration among methods GPS (Global Positioning System) and methods LPS (Local Positioning System) through the three-dimensional recession. This article presents a conceptual revision on reference systems, global system, astronomical coordinates, local astronomical system, system of geodetic coordinates or ellipsoidal, geodetic coordinates or ellipsoidal and deviation of the vertical. It is shown the definition and the model of the simple Procrustes Problem that allows the calculation of the components of the deviation of the vertical using positions measured with GPS, in a station base and in target stations, and LPS directions (horizontal and vertical directions with theodolite) of the station base for the other stations.*

**Keywords:** Local and Global Referencials, Simple Procrustes Problem, Vertical Deflection.

## 1. INTRODUÇÃO

Segundo GRAFAREND & AWANGE (2000), o problema de orientação tridimensional consiste na determinação da matriz de rotação (3 x 3) e seus 3 parâmetros, longitude astronômica  $\Lambda$ , latitude astronômica  $\Phi$  e um parâmetro de orientação desconhecida  $\Sigma$ , que relacionam o sistema astronômico local ao sistema geodésico global geocêntrico. Isto pode ser feito a partir de medidas de posicionamento **GPS**, em

uma estação base e em estações alvo, e medidas de direção **LPS** (direção horizontal e direção vertical com teodolito) da estação base para as estações alvo. São necessárias no mínimo três estações alvo.

A transformação de um conjunto de coordenadas cartesianas em outro conjunto de coordenadas cartesianas, através da matriz de rotação, é feita utilizando-se o Problema Procrustes simples ou Problema Procrustes parcial, um caso especial do Problema Procrustes geral, que inclui além dos elementos de rotação, elementos de translação, escala e reflexão.

Determinando-se desta maneira a longitude astronômica  $\Lambda$  e a latitude astronômica  $\Phi$  não são mais necessárias observações astronômicas para se obter o desvio da vertical.

## 2. SISTEMAS DE REFERÊNCIA

Um ponto do espaço tridimensional pode ser determinado de forma unívoca (figura 1), pelo afastamento  $r$  entre a origem do sistema e o ponto **R** considerado, pelo ângulo  $\beta$  formado entre o segmento **OR** e a projeção ortogonal deste sobre o plano **xy** e pelo ângulo  $\alpha$  que a projeção do segmento **OR** sobre o plano **xy** forma com o semi-eixo **OX**. As coordenadas esféricas de um ponto **R** são dadas por  $(r, \alpha, \beta)$ .

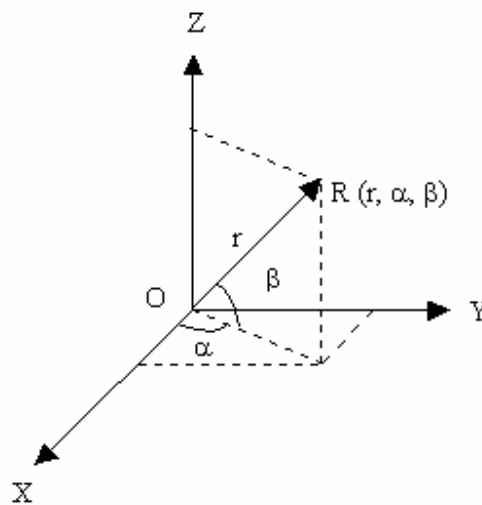


Figura 1 – Sistema de Coordenadas Esféricas e Sistema de Coordenadas Cartesianas.

Supõe-se o sistema de coordenadas esféricas sobreposto a um sistema de coordenadas cartesianas (TORGE, 1980, p.16). Assim, o ponto R, determinado pelo terno cartesiano  $(x,y,z)$  pode ser expresso pelas coordenadas esféricas  $(r, \alpha, \beta)$ , sendo o relacionamento entre os dois sistemas obtido pelo vetor posição :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \alpha \\ \cos \beta \sin \alpha \\ \sin \beta \end{bmatrix} \quad (1)$$

## 3. SISTEMA GLOBAL

Os sistemas de coordenadas são definidos em termos de orientação, unidade e curvatura, sendo a princípio tridimensionais. A quarta dimensão, o tempo, foi introduzida devido a movimentos da Terra e de outros corpos celestes e de deformações na superfície terrestre (TORGE, 2001, p.18).

Um sistema de coordenadas será global se a sua origem for geocêntrica. Se a origem não for geocêntrica o sistema será regional ou local (COSTA, 1999, p.10).

### 3.1 SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS ASSOCIADO AO SISTEMA GLOBAL

Um sistema de coordenadas cartesianas associado ao sistema global (figura 2) é um sistema de coordenadas cartesianas espaciais **X,Y, Z**, geocêntrico e fixo a Terra (i.e. girando com ela no seu movimento de rotação). É utilizado como sistema de coordenadas terrestres fundamental (TORGE, 2001, p.32).

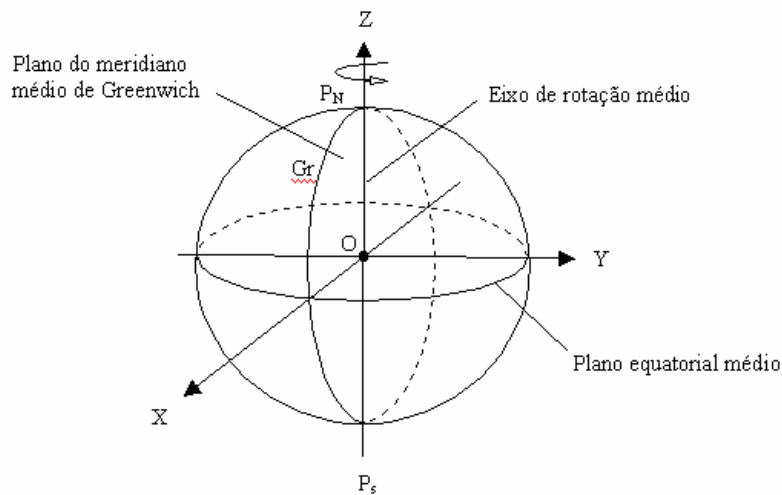


Figura 2 – Sistema de Coordenadas Cartesianas Associado ao Sistema Global.

Um sistema de coordenadas cartesianas associado ao sistema global, caracteriza-se por:

- origem no geocentro (**O**), centro de massa da Terra, incluindo hidrosfera e atmosfera;
- o eixo **Z** é direcionado para o Pólo Norte terrestre médio;
- o plano equatorial médio é perpendicular ao eixo **Z** e contém os eixos **X** e **Y**;
- o plano **XZ** é gerado pelo plano do meridiano médio de Greenwich (**Gr**), obtido pelo eixo de rotação médio e pelo meridiano origem de Greenwich (referência do Tempo Universal);
- o eixo **Y** torna o sistema dextrógiro.

Este sistema utiliza o eixo de rotação médio e o plano equatorial médio, devido a alterações no movimento de rotação da Terra.

### 3.2 SISTEMA DE COORDENADAS ESFÉRICAS ASSOCIADO AO SISTEMA GLOBAL

Um ponto do espaço tridimensional também pode ser determinado de forma unívoca pelas suas coordenadas esféricas.

As coordenadas esféricas associadas ao sistema global, mostradas na figura 3, são chamadas  $r$ ,  $\vartheta$ ,  $\lambda$ , onde  $r$  é a distância entre o geocentro e o ponto **P** considerado,  $\vartheta$  a co-latitute e  $\lambda$  a longitude. No lugar de  $\vartheta$  pode ser utilizada também a latitude  $\varphi$ , dada por:

$$\varphi = 90^\circ - \vartheta \quad (2)$$

A posição do ponto **P** é dada pelo vetor posicional:

$$r = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \text{sen } \vartheta \cos \lambda \\ \text{sen } \vartheta \text{sen } \lambda \\ \cos \vartheta \end{bmatrix} \quad (3)$$

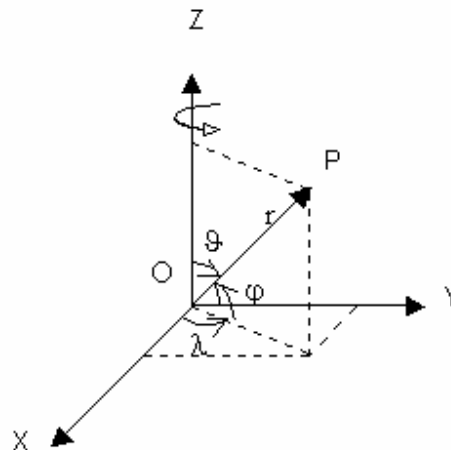


Figura 3 – Sistemas de Coordenadas Cartesianas e Esféricas Associadas ao Sistema Global.

#### 4. COORDENADAS ASTRONÔMICAS

As coordenadas astronômicas são a latitude astronômica  $\Phi$  e a longitude astronômica  $\Lambda$ . É comum encontrar-se os termos “coordenadas geográficas” ou “coordenadas astronômicas geográficas” ao invés de “coordenadas astronômicas”.

Latitude astronômica  $\Phi$  é o ângulo formado pela vertical do ponto (direção do vetor intensidade da gravidade  $\mathbf{g}$ ) com a sua projeção equatorial. Por convenção a latitude é positiva no hemisfério norte e negativa no hemisfério sul (GEMAEL, 1999, p.16).

Longitude astronômica  $\Lambda$  é o ângulo diedro formado pelo meridiano astronômico do ponto (local) com o meridiano origem de Greenwich (GEMAEL, 1999, p.16).

Meridiano astronômico é a circunferência máxima cujo plano contém o eixo de rotação e o zênite do lugar.

O plano do meridiano astronômico do ponto contém a vertical que passa pelo ponto e uma linha paralela ao eixo de rotação, pois a vertical e o eixo de rotação não são co-planares.

A figura 4 mostra as coordenadas astronômicas.

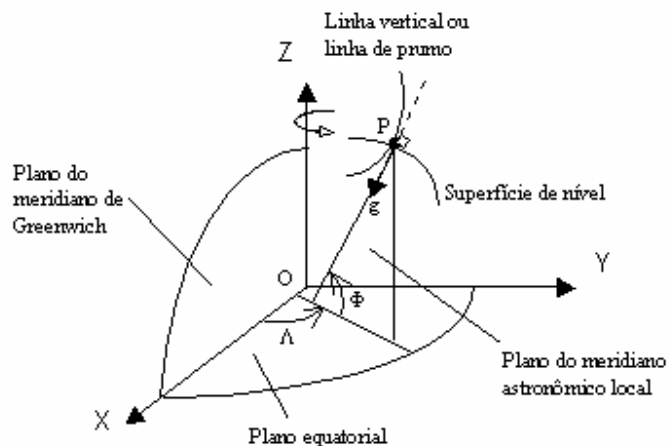


Figura 4 – Coordenadas Astronômicas.

#### 5. SISTEMA ASTRONÔMICO LOCAL

Observações astronômicas e geodésicas, como azimute astronômico, distâncias, ângulos e direções horizontais, ângulos zenitais e diferenças de altura, estão relacionadas com a direção da linha de prumo no ponto de observação e conseqüentemente ao campo da gravidade da terrestre. Com isso, essas

observações estão referidas a um sistema astronômico local (figura 5).

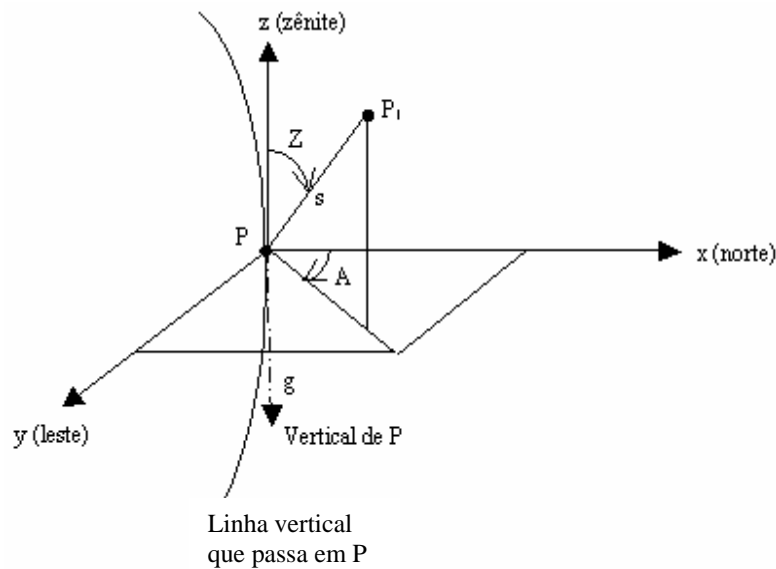


Figura 5 – Sistema Astronômico Local.

Azimute astronômico  $A$  é o ângulo medido no plano do horizonte entre o meridiano astronômico de  $P$  e o plano vertical que passa por  $P_1$ . É contado a partir do eixo  $X$  no sentido horário. Distância zenital ou ângulo zenital  $Z$  é o ângulo medido no plano vertical entre a vertical local (direção do vetor gravidade) e a linha que une  $P$  a  $P_1$ . A distância espacial  $s$  é o comprimento entre  $P$  e  $P_1$ .

Operações de nivelamento geométrico associadas a gravimetria referem-se a vertical local, proporcionando diferenças de altura em relação às superfícies equipotenciais que passam pelos pontos nivelados.

Medidas da gravidade e de gradientes da gravidade também se referem ao sistema astronômico local.

A linha norte-sul é a projeção do meridiano astronômico do ponto no plano topográfico, que por definição é horizontal e tangente à superfície da Terra.

O sistema astronômico local possui as seguintes características (TORGE, 2001, p. 39):

- origem em um ponto  $P$  na superfície física;
- coordenadas cartesianas, formando um sistema levógiro;
- o eixo  $z$  coincide com a direção da vertical local com sentido positivo na direção do zênite;
- o eixo  $x$  é perpendicular ao eixo  $z$  e está contido no plano do meridiano astronômico do ponto  $P$ , com sentido positivo para o Norte astronômico;
- o eixo  $y$  é perpendicular aos eixos  $x$  e  $z$  e é contado positivamente para o leste astronômico.

Conforme a figura 5 o vetor posição entre  $P$  e  $P_1$  é dado por:

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \cos A \operatorname{sen} Z \\ \operatorname{sen} A \operatorname{sen} Z \\ \cos Z \end{bmatrix} \quad (4)$$

O sistema astronômico local é utilizado em aplicações astronômicas e geodésicas.

## 6. SISTEMA DE COORDENADAS GEODÉSICAS OU ELIPSÓIDICAS

Um sistema de coordenadas geodésicas ou elipsóidicas é definido no elipsóide de revolução e possui as seguintes características:

- a origem situa-se no centro do elipsóide;

- b) o eixo  $\bar{Z}$  coincide com o eixo de rotação do elipsóide;
- c) o eixo  $\bar{X}$  situa-se na intersecção do plano equatorial do elipsóide com o plano do meridiano de Greenwich;
- d) o eixo  $\bar{Y}$  é escolhido de forma que o sistema seja dextrógiro;

Encontra-se o termo “coordenadas geográficas elipsóidicas” ao invés de “coordenadas geodésicas” ou “coordenadas elipsóidicas”.

## 7. COORDENADAS GEODÉSICAS OU ELIPSÓIDICAS

As coordenadas geodésicas ou elipsóidicas são a latitude geodésica ou elipsóidica e a longitude geodésica elipsóidica, mostradas na figura 6 (TORGE, 1980, p.52).

A latitude geodésica ou elipsóidica  $\phi$  do ponto **P** é definida como o ângulo entre a normal ao elipsóide que passa por **P** e o plano equatorial elipsóidico.

A longitude geodésica ou elipsóidica  $\lambda$  do ponto **P** é o ângulo formado entre o eixo  $\bar{X}$  e a projeção sobre o plano equatorial, da normal ao elipsóide nesse ponto.

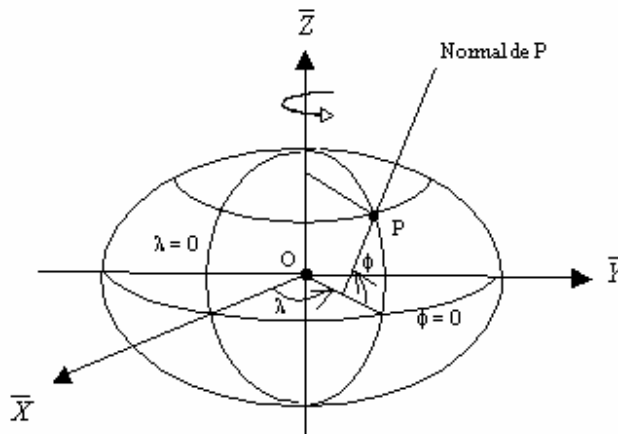


Figura 6 – Coordenadas Geodésicas.

As coordenadas de um ponto na superfície física da Terra em relação ao elipsóide de revolução, ficam definidas em função de uma terceira coordenada, a altitude geométrica **h** (**PP'**), que é a distância sobre a normal, entre a superfície física da Terra e a superfície do elipsóide.

A figura 7 mostra as coordenadas geodésicas ou elipsóidicas espaciais  $\phi$ ,  $\lambda$  e **h**.

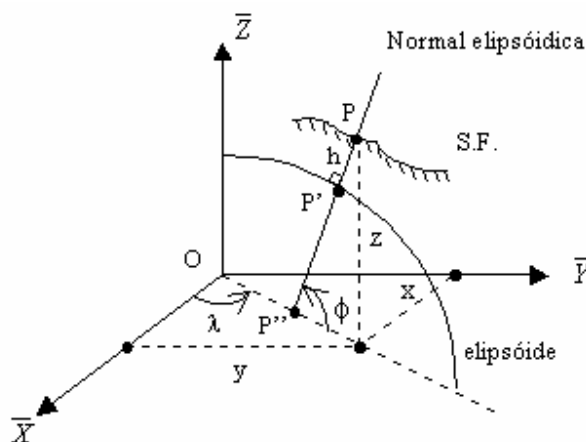


Figura 7 – Sistema de Coordenadas Geodésicas ou Elipsóidicas Espaciais.

## 8. DESVIO DA VERTICAL

Todos os corpos na Terra acham-se sujeitos à força da gravidade, que é resultante da força de atração exercida pelas massas terrestres e da força centrífuga decorrente do movimento de rotação.

O campo da gravidade é um campo conservativo, dotado de geopotencial ou potencial gravífico  $W$ , resultante da soma do potencial de atração e do potencial centrífugo.

As superfícies equipotenciais (potencial gravífico  $W$  constante) do campo da gravidade, são denominadas geopes, e o geóide é o geope que mais se aproxima do nível médio dos mares em todo o globo.

Como a distribuição de massas não é homogênea, os geopes são superfícies suavemente irregulares, e perpendiculares em todos os seus pontos às linhas de força do campo da gravidade, as linhas verticais. As linhas verticais são utilizadas como referência física nos equipamentos de medição utilizados em Topografia e Geodésia, sendo materializadas pelo fio de prumo ou pelo eixo vertical de um teodolito nivelado.

Já, a vertical de um ponto, é a reta tangente à linha de força nesse ponto e simboliza a direção do vetor gravidade.

Denomina-se desvio da vertical ( $i$ ) ao ângulo formado, em um certo ponto, pelas normais à superfície equipotencial que passa pelo ponto e ao elipsóide, isto é, o ângulo entre a vertical do ponto e a normal (figura 8).

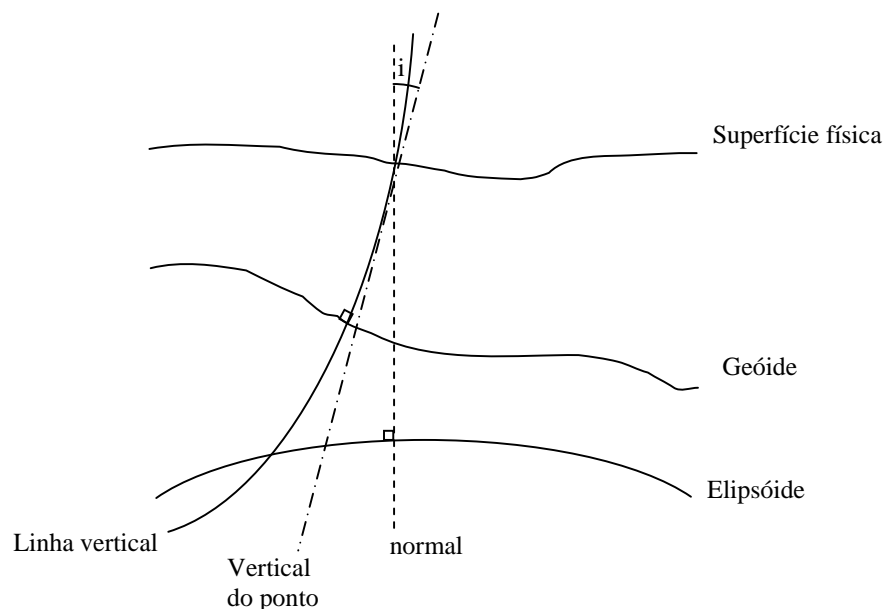


Figura 8 - Desvio da Vertical.

A vertical do ponto (tangente à linha vertical) define suas coordenadas astronômicas. As coordenadas geodésicas são obtidas utilizando os dados de observação, GPS, por exemplo, sobre a superfície de referência (elipsóide de revolução).

Os cálculos geodésicos para obtenção das coordenadas dos vértices são efetuados sobre o elipsóide. Porém, as observações são executadas com um aparelho colocado em uma estação, que se refere à direção da vertical astronômica, que não é normal ao elipsóide.

O cálculo do desvio da vertical não é feito diretamente, mas sim através de seus componentes  $\xi$  e  $\eta$  chamados respectivamente de componente meridiana e componente 1º vertical (GEMAEL, 1999, p.19).

São quatro os métodos de determinação do desvio da vertical.

O primeiro, e mais conhecido, é o método astrogeodésico, onde as componentes do desvio da vertical são determinadas através de coordenadas astronômicas e geodésicas em um mesmo ponto. É restrito às áreas continentais, além de conduzir a valores relativos que dependem das coordenadas do datum e dos parâmetros elipsoidais.

Outro método é o gravimétrico (GEMAEL, 1999, p.149), onde o desvio da vertical é obtido em função de anomalias da gravidade, através da fórmula de Venning-Meinesz.

Um terceiro método de determinação do desvio da vertical é o método astrogravimétrico (GEMAEL, 1999, p.177), que conjuga determinações astrogeodésicas com gravimétricas.

E, um quarto método de obtenção do desvio é através de medidas **GPS/LPS**, utilizando-se do “Problema Procrustes simples” (GRAFAREND & AWANGE, 2000) para o cálculo.

## 9. PROBLEMA PROCRUSTES SIMPLES

Chama-se problema de orientação tri-dimensional a determinação da matriz de rotação (3 x 3) cujos parâmetros são a longitude astronômica  $\Lambda$ , a latitude astronômica  $\Phi$  e a orientação horizontal  $\Sigma$  no plano horizontal.

O relacionamento entre coordenadas no sistema astronômico local e coordenadas no sistema geodésico global geocêntrico, **ITRF2000**, por exemplo, pode ser obtido a partir de medidas de posicionamento **GPS** (**Global Positioning System**) e medidas de direções horizontais e verticais efetuadas por um teodolito em uma estação a pelo menos três alvos. Através do problema Procrustes simples, ou Problema Procrustes parcial, obtém-se o relacionamento entre  $(\Lambda - \lambda)$  e  $(\Phi - \phi)$ , e com isso as componentes do desvio da vertical.

O Problema Procrustes simples só envolve rotações, e consiste de uma simplificação do Problema Procrustes geral que envolve rotações, translações, escala e reflexão.

### 9.1 MODELO PROCRUSTES SIMPLES

A partir de um levantamento **GPS**, obtém-se as coordenadas cartesianas  $(X, Y, Z)$  da estação base e as coordenadas cartesianas  $(X_i, Y_i, Z_i)$  das estações alvo, no Sistema Global, formando um conjunto de vetores  $[F_1, F_2, F_3]$ , fixos ao centro de massa da Terra. Adicionalmente, um levantamento efetuado com teodolito proporciona coordenadas cartesianas a partir de coordenadas esféricas, que formam um conjunto de vetores  $[F_{1*}, F_{2*}, F_{3*}]$  fixos à superfície física da Terra.

Tem-se então,  $F$ , formado por coordenadas do sistema global e  $F_*$  formado por coordenadas no sistema astronômico local.

O relacionamento entre  $F$  e  $F_*$  é dado por:

$$[F_{1*}, F_{2*}, F_{3*}] = [F_1, F_2, F_3] R_E^T(\Lambda, \Phi, \Sigma) = [F_1, F_2, F_3] R_3^T(\Lambda) R_2^T\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right) R_3^T(\Sigma) \quad (5)$$

sendo

$$R_3(\Lambda) = \begin{bmatrix} \cos(\Lambda) & \text{sen}(\Lambda) & 0 \\ -\text{sen}(\Lambda) & \cos(\Lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$R_2\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right) & 0 & -\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right) & 0 & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$R_3(\Sigma) = \begin{bmatrix} \cos(\Sigma) & \text{sen}(\Sigma) & 0 \\ -\text{sen}(\Sigma) & \cos(\Sigma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

A conversão de coordenadas esféricas em coordenadas cartesianas é feita da seguinte forma:



$$S_i = \begin{bmatrix} \cos B_i \cos T_i \\ \cos B_i \sin T_i \\ \sin B_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i - x \\ y_i - y \\ z_i - z \end{bmatrix}_{F^*} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (9)$$

onde  $T_i$  representa a direção horizontal medida,  $B_i$  a direção vertical medida e  $S_i$  a distância espacial, fornecida por:

$$S_i = S(X, X_i) = \sqrt{(X_i - X)^2 + (Y_i - Y)^2 + (Z_i - Z)^2} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} x_i - x \\ y_i - y \\ z_i - z \end{bmatrix}_{F^*} = R_E(\Lambda, \Phi, \Sigma) \begin{bmatrix} X_i - X \\ Y_i - Y \\ Z_i - Z \end{bmatrix}_{F^*} \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 - x & x_2 - x & \Lambda & x_n - x \\ y_1 - y & y_2 - y & \Lambda & y_n - y \\ z_1 - z & z_2 - z & \Lambda & z_n - z \end{bmatrix}_{F^*} = R \begin{bmatrix} X_1 - X & Y_1 - Y & Z_1 - Z \\ X_2 - X & Y_2 - Y & Z_2 - Z \\ M & M & M \\ X_n - X & Y_n - Y & Z_n - Z \end{bmatrix}_{F^*} \quad (12)$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} x_1 - x & x_2 - x & \Lambda & x_n - x \\ y_1 - y & y_2 - y & \Lambda & y_n - y \\ z_1 - z & z_2 - z & \Lambda & z_n - z \end{bmatrix}_{F^*} \quad (13)$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} X_1 - X & Y_1 - Y & Z_1 - Z \\ X_2 - X & Y_2 - Y & Z_2 - Z \\ M & M & M \\ X_n - X & Y_n - Y & Z_n - Z \end{bmatrix}_{F^*} \quad (14)$$

$$Y_1 = Y_2 X \quad (15)$$

sendo

$$X = R^T \quad (16)$$

As matrizes  $Y_1$  e  $Y_2$  são as matrizes de pseudo-observações, sendo a matriz  $Y_1$  levógira e a matriz  $Y_2$  dextrógira. A matriz de rotação desconhecida  $R^T$ , designada por  $X$  é um conjunto de parâmetros fixos desconhecidos, objetivo da injunção quadrática da condição de ortonormalidade da matriz  $X$ , dada por:

$$X^T X = I_3 \quad (17)$$

A matriz  $E$  compreende os erros das medidas coletadas, tornando inconsistente a equação (15):

$$Y_1 = Y_2 X + E \quad (18)$$

O Problema Procrustes simples consiste em encontrar uma solução para o sistema matricial de equações lineares inconsistentes, fornecido pela equação (18).

A partir das pseudo-observações  $\{Y_1, Y_2\}$  e do ajustamento das equações das pseudo-observações  $Y_1 = Y_2 X + E$  com respeito às injunções  $X^T X = I_3$ , calcula-se os três parâmetros de orientação (longitude astronômica  $\Lambda$ , latitude astronômica  $\Phi$  e orientação horizontal desconhecida  $\Sigma$ ) a partir de  $R$ :

$$R = R_3(\Sigma)R_2\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right)R_3(\Lambda) = \begin{bmatrix} \cos \Sigma \sin \Phi \cos \Lambda - \sin \Sigma \sin \Lambda & \cos \Sigma \sin \Phi \sin \Lambda + \sin \Sigma \cos \Lambda & -\cos \Sigma \cos \Phi \\ -\sin \Sigma \sin \Phi \cos \Lambda - \cos \Sigma \sin \Lambda & -\sin \Sigma \sin \Phi \sin \Lambda + \cos \Sigma \cos \Lambda & \sin \Sigma \cos \Phi \\ \cos \Phi \cos \Lambda & \cos \Phi \sin \Lambda & \sin \Phi \end{bmatrix} \quad (19)$$

com:

$$0 \leq \Lambda \leq 2\pi \quad -\frac{\pi}{2} < \Phi < +\frac{\pi}{2} \quad 0 \leq \Sigma \leq 2\pi$$

O caminho inverso dos ângulos de Euler fornece:

$$\tan \Lambda = \frac{r_{32}}{r_{31}} \quad \Lambda = \arctan \frac{r_{32}}{r_{31}} \quad (20)$$

$$\tan \Phi = \frac{r_{33}}{\sqrt{r_{31}^2 + r_{32}^2}} \quad \Phi = \arctan \frac{r_{33}}{\sqrt{r_{31}^2 + r_{32}^2}} \quad (21)$$

$$\tan \Sigma = -\frac{r_{23}}{r_{13}} \quad \Sigma = \arctan\left(-\frac{r_{23}}{r_{13}}\right) \quad (22)$$

Desta maneira chega-se aos valores da longitude astronômica  $\Lambda$ , da latitude astronômica  $\Phi$  e da orientação desconhecida  $\Sigma$ . As observações **GPS** fornecem a latitude elipsóidica  $\phi$  e a longitude elipsóidica  $\lambda$ . As componentes do desvio da vertical  $\xi$ , componente meridiana e  $\eta$  componente primeiro vertical podem então ser calculadas por:

$$\xi = \Phi - \phi = \Delta\phi \quad (23)$$

$$\eta = (\Lambda - \lambda) \cos\phi = \Delta\lambda \cos\phi \quad (24)$$

## 10. CONCLUSÕES

A efetiva implementação da determinação do desvio da vertical através da solução do modelo Procrustes simples, pode trazer muitas vantagens a todas as determinações geodésicas e topográficas no território nacional.

## 11. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

COSTA, S.M.A. **Integração da Rede Geodésica Brasileira aos Sistemas de Referência Terrestres**. Curitiba. 156 p. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas). Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. Universidade Federal do Paraná. 1999.

GEMAEL, C. **Introdução à Geodésia Física**. Curitiba: Editora da UFPR, 1999. 302 p.

GRAFAREND, E.W.; AWANGE, J.L. Determination of vertical deflections by GPS/LPS Measurements. **Zfv**. v.8, 2000. p 279-288.

TORGE, W. **Geodesy**. Berlin, New York : Walter de Gruyter, 1980. 254 p.

TORGE, W. **Geodesy**. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2001. 416 p.