

# METODOLOGIAS PARA A DETERMINAÇÃO DAS COMPONENTES DO DESVIO DA VERTICAL

VAGNER GONÇALVES FERREIRA  
ROGERS ADEMIR DRUNN PEREIRA  
ALESSANDRO SALLES CARVALHO  
SILVIO ROGÉRIO CORREIA DE FREITAS

Universidade Federal do Paraná - UFPR  
Curso de Pós-graduação em Ciências Geodésicas - CPCG  
{vgf,}@ufpr.br

**RESUMO** – As componentes do desvio da vertical ( $\zeta$ ,  $\eta$ ) para uma estação localizada em Curitiba são estimadas por diferenças de atitudes elipsoidais obtidas por GPS (*Global Positioning System*) e diferenças de altitudes ortométricas via nivelamento de precisão usando a metodologia de Helmert. Avaliou-se ainda neste trabalho a metodologia que se baseia no *método de Procrustes parcial e o problema da orientação*, neste foi avaliado duas estratégias, uma com LPS (*Local Positioning System*) para o posicionamento local e outra com o emprego do STL (*Sistema Topográfico Local*). Os resultados obtidos são discutidos em função da aplicabilidade em situações no contexto das engenharias.

**ABSTRACT** – Deflection of the vertical components ( $\zeta$ ,  $\eta$ ) of a station located in Curitiba are estimated from the ellipsoidal height differences obtained from global positioning system (GPS) measurements and orthometric height differences calculated from precise leveling using Helmert's formula. In this paper were also evaluated two strategies using *partial Procrustes method and the orientation problem*, one with based local positioning system (LPS) and other with topographic local system (STL). The results are discussed in the context of engineering applications.

## 1 INTRODUÇÃO

O mapeamento faz-se necessário para todo o planejamento, tal como o voltado ao desenvolvimento de um município. No campo da engenharia o levantamento topográfico é de vital importância no estudo, elaboração e implantação de projetos, tais como: saneamento, urbanismo, divisão de terras, rodovias e etc.

Os sistemas de navegação por satélites artificiais causaram mudanças nos mais diversos segmentos da sociedade. Eles ganharam rápida popularidade e alteraram sobremaneira os procedimentos para realização dos levantamentos. Em particular, a utilização conjunta de taquímetros, indexados a um sistema topocêntrico  $\mathbb{F}^*$ , e receptores GNSS (*Global Navigation Satellite System*), indexados num sistema suposto geocêntrico  $\mathbb{F}^*$ , geram a necessidade de tratamento de dados, a fim de que se possa dar a mesma conotação a todas as observações.

No Brasil, a NBR 14.166, Rede de Referência Cadastral Municipal – Procedimento, em seu Anexo A, fixa “Fórmulas de transformação de coordenadas geodésicas em coordenadas plano-retangulares no Sistema Topográfico Local”, que apresenta reduções para coordenadas geodésicas à um sistema local de uma maneira bem peculiar.

Os pontos obtidos por GPS acrônimo de *Global Positioning System* estão servindo de apoio para poligonais topográficas, vinculando desta forma, levantamentos topográficos via taquímetros com posicionamento GPS. Deve-se salientar que os sistemas de referência, para cada um dos instrumentos envolvidos no levantamento de dados, topográficos e geodésicos, se diferem quanto à forma e a origem. Levantamentos topográficos convencionais e com GPS podem ser integrados, desde que conhecida a relação entre estes dois referenciais de natureza distintas entre si. Neste contexto, vislumbra-se a necessidade do conhecimento das componentes do desvio da vertical.

O estudo aqui apresentado visa determinar as componentes do desvio da vertical a fim de empregar o sistema geodésico local como uma alternativa para esta associação de referenciais. Porém, será avaliada a determinação das componentes via metodologias diferentes entre si, sendo elas: *o método de procrustes parcial e o problema da orientação* e *o método de Helmert*.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 Extensão do plano topográfico

Segundo a NBR 13.133 o plano de projeção, para o plano topográfico local, tem sua dimensão máxima limitada a 80 km a partir da origem de maneira que o erro relativo decorrente da desconsideração da curvatura terrestre não ultrapasse 1/35.000 nesta dimensão e 1/15.000 nas imediações da extremidade desta dimensão. A extensão do plano topográfico se dá conforme o erro que se considere tolerável ao desconsiderarmos a curvatura terrestre (ver Figura 1), sendo o erro planimétrico máximo cometido ( $\Delta\ell$ ) mostrado na seqüência:

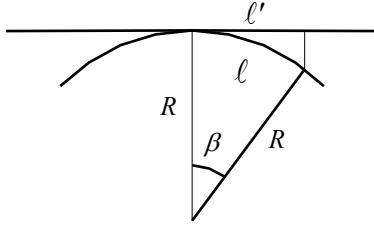


Figura 1 – Deformação planimétrica.

Da Figura 1 advêm as relações:

$$\ell' = R \cdot \text{sen } \beta \quad (1)$$

$$\ell = R \cdot \beta \quad (2)$$

$$\Delta\ell = \ell' - \ell \quad (3)$$

Desenvolvendo  $\text{sen}\beta$  em série de Taylor tem-se:

$$\text{sen } \beta = \beta - \frac{\beta^3}{3!} + \frac{\beta^5}{5!} - \frac{\beta^7}{7!} + \dots$$

Desprezando a partir do terceiro termo em diante e substituindo em (3) tem-se

$$\Delta\ell = R \cdot \left( \beta - \frac{\beta^3}{3!} - \beta \right) \quad (4)$$

elevando (2) ao cubo e substituindo em (4) e fazendo algumas manipulações, facilmente chega-se a

$$\Delta\ell = -\frac{\ell^3}{6 \cdot R^2} \quad (5)$$

Considerando o raio médio para a Terra 6.370 km, tem-se:

$$\Delta\ell(\text{mm}) \approx -0,004 \cdot \ell^3(\text{km}) \quad (6)$$

Conforme pode ser observado na NBR 13.133.

Esta análise da extensão em relação à precisão almejada faz-se necessária em vista de que a solução adotada aqui está sempre referenciada a um ponto origem (*datum*).

## 2.2 Fórmulas de transformação de coordenadas geodésicas em coordenadas plano-retangulares no sistema topográfico local (STL)

Logo abaixo segue transcrito do Anexo A da NBR 14.166 o formulário para transformação de coordenadas geodésicas em coordenadas plano-retangulares no STL. Lembrando que tais fórmulas são adaptadas das fórmulas de Puissant, para o cálculo do Problema Geodésico Inverso.

$$x_j = x_i + dx_j \quad (7)$$

$$y_j = y_i + dy_j \quad (8)$$

$$x_i = 150.000 \quad (9)$$

$$y_i = 250.000 \quad (10)$$

$$dx_{ij} = -\Delta\lambda_i \cdot \cos \varphi_j \cdot N_j \cdot \text{arcl}'' \cdot c \quad (11)$$

$$dy_{ij} = \frac{1}{B} \cdot \left[ \Delta\varphi_i + C \cdot x_j^2 + D \cdot \Delta\varphi_i^2 + E \cdot \Delta\varphi_i \cdot x_j^2 + E \cdot C \cdot x_j^4 \right] \cdot c \quad (12)$$

$$\Delta\lambda = \lambda_j - \lambda_i \quad (13)$$

$$\Delta\varphi = \varphi_j - \varphi_i \quad (14)$$

$$\Delta\lambda_i = \Delta\lambda'' \cdot \left[ 1 - 3,9173 \cdot 10^{-12} \cdot (\Delta\lambda'')^2 \right] \quad (15)$$

$$\Delta\varphi_i = \Delta\varphi'' \cdot \left[ 1 - 3,9173 \cdot 10^{-12} \cdot (\Delta\varphi'')^2 \right] \quad (16)$$

$$B = \frac{1}{M_i \cdot \text{arcl}''} \quad (17)$$

$$C = \frac{\tan \varphi_i}{2 \cdot M_i \cdot N_i \cdot \text{arcl}''} \quad (18)$$

$$D = \frac{3 \cdot e^2 \cdot \text{sen} \varphi_i \cdot \cos \varphi_i \cdot \text{arcl}''}{2 \cdot (1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi_i)} \quad (19)$$

$$E = \frac{1 + 3 \cdot \tan \varphi_i}{6 \cdot N_i^2} \quad (20)$$

$$c = \frac{R_i + H_t}{R_i} \quad (21)$$

$$R_i = \sqrt{M_i \cdot N_i} \quad (22)$$

$$M_i = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{(1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi_i)^{3/2}} \quad (23)$$

$$N_i = \frac{a}{(1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi_i)^{1/2}} \quad (24)$$

$$N_j = \frac{a}{(1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi_j)^{1/2}} \quad (25)$$

$$e = \sqrt{f \cdot (2 - f)} \quad (26)$$

$i = 0$  e  $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

### 2.3. O sistema geodésico local (SGL)

A Figura 2 mostra um sistema de coordenadas com origem na superfície terrestre, ponto  $P$ ; o eixo  $z$  coincide com a normal ao elipsóide, dirigido para um ponto próximo ao zênite; o eixo  $y$  coincide com a direção tangente ao meridiano geodésico dirigido para o norte e o eixo  $x$  é perpendicular aos eixos  $y$  e  $z$ , tornando, desta forma, o sistema dextrógiro.

De acordo com Leick (1995) este sistema tem grande aplicação no desenvolvimento de modelos matemáticos que integram observações GPS e terrestres. Com isto, podemos integrar observações de estações totais com observações GPS.

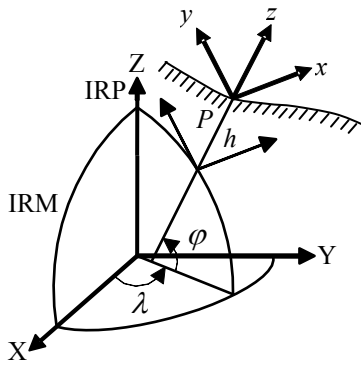


Figura 2. Sistema Geodésico Local.  
Adaptado de: Leick (1995).

Este sistema é designado por Leick (1995) de “Sistema Geodésico Local”. O sistema geodésico local é similar ao sistema astronômico local. Observa-se, contudo, que o sistema astronômico local é um sistema natural ditado pelas propriedades físicas da Terra não se aplicando estas propriedades ao sistema geodésico local. Segundo Garnés (1998) há uma proximidade entre o sistema geodésico local e o sistema topográfico local. Sendo, no geodésico local a cota  $z$  definida segundo a direção da normal do ponto origem do sistema e no topográfico local a cota  $z$  é definida segundo a direção da vertical no ponto origem.

## 2.2 Transformação de Coordenadas

### 2.2.1 Conversão de coordenadas geocêntricas em topocêntricas

Em Leick (1995) e Strang (1997) é dada a relação entre as coordenadas geodésicas cartesianas  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , em um sistema supostamente geocêntrico, e  $x$ ,  $y$  e  $z$ , no sistema topocêntrico com origem em um ponto com coordenadas geodésicas curvilíneas  $\varphi_i$ ,  $\lambda_i$  e  $h_i$ , referentes ao elipsóide associado a um sistema cartesiano conforme pode ser observado na Figura 2 e é expressa matematicamente por:

$$\begin{bmatrix} x_j - x_i \\ y_j - y_i \\ z_j - z_i \end{bmatrix} = \mathbf{R}_1(90^\circ - \varphi_i) \cdot \mathbf{R}_3(90^\circ + \lambda_i) \cdot \begin{bmatrix} X_j - X_i \\ Y_j - Y_i \\ Z_j - Z_i \end{bmatrix} \quad (27)$$

onde:

$\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_3$ , são as matrizes de rotação em torno dos eixos  $X$  e  $Z$ , respectivamente, do sistema cartesiano transladado até o ponto  $P$ .  $\varphi_i$ ,  $\lambda_i$  são as coordenadas geodésicas curvilíneas do ponto de origem do sistema topocêntrico.  $X_i$ ,  $Y_i$ ,  $Z_i$  são as coordenadas geodésicas cartesianas do ponto de origem referenciadas ao elipsóide.  $i = 0$  e  $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Desenvolvendo a equação (27) tem-se de forma simplificada

$$\begin{bmatrix} x_j - x_i \\ y_j - y_i \\ z_j - z_i \end{bmatrix} = \mathbf{R} \cdot \begin{bmatrix} X_j - X_i \\ Y_j - Y_i \\ Z_j - Z_i \end{bmatrix} \quad (28)$$

onde:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -\text{sen}\lambda_i & \text{cos}\lambda_i & 0 \\ -\text{sen}\varphi_i \cdot \text{cos}\lambda_i & -\text{sen}\varphi_i \cdot \text{sen}\lambda_i & \text{cos}\varphi_i \\ \text{cos}\varphi_i \cdot \text{cos}\lambda_i & \text{cos}\varphi_i \cdot \text{sen}\lambda_i & \text{sen}\varphi_i \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Se conhecidas as coordenadas astronômicas curvilíneas ( $\Lambda_i$ ,  $\Phi_i$ ,  $H_i$ ) para o ponto *datum* tem-se para a (29):

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -\text{sen}\Lambda_i & \text{cos}\Lambda_i & 0 \\ -\text{sen}\Phi_i \cdot \text{cos}\Lambda_i & -\text{sen}\Phi_i \cdot \text{sen}\Lambda_i & \text{cos}\Phi_i \\ \text{cos}\Phi_i \cdot \text{cos}\Lambda_i & \text{cos}\Phi_i \cdot \text{sen}\Lambda_i & \text{sen}\Phi_i \end{bmatrix} \quad (30)$$

que levada à (28) fornece o sistema astronômico local.

### 2.2.2 Conversão de coordenadas geodésicas curvilíneas em coordenadas geodésicas cartesianas

Assumindo um elipsóide de revolução com a mesma origem do sistema de coordenadas cartesianas, a relação entre as coordenadas cartesianas geocêntricas e elipsoidais é dada por:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N+h) \cdot \text{cos}\varphi \cdot \text{cos}\lambda \\ (N+h) \cdot \text{cos}\varphi \cdot \text{sen}\lambda \\ [N \cdot (1 - e^2) + h] \cdot \text{sen}\varphi \end{bmatrix} \quad (31)$$

em que a grande normal ( $N$ ) e a excentricidade ( $e$ ) do elipsóide são respectivamente dadas por:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi}} \quad (32)$$

e

$$e^2 = f \cdot (2 - f). \quad (33)$$

Onde  $a$  e  $f$ , respectivamente, semi-eixo maior e achatamento do elipsóide.

## 2.2. Determinação das componentes do desvio da vertical

### 2.3.1 Procrustes parcial e o problema de orientação

A solução Procrustes surge como uma alternativa à solução de equações não lineares. De acordo Awenge e Grafarend (2005), o “*Problema Parcial Procrustes*”, em ajustamento, é formulado como um problema de mínimos quadrados no qual uma matriz  $\mathbf{A}$  é transformada em uma matriz  $\mathbf{G}$ . Essa transformação vale-se de uma matriz de transformação ortogonal  $\mathbf{T}$  tal que a soma dos resíduos dos quadrados da matriz  $\mathbf{E} = \mathbf{A} - \mathbf{GT}$  é mínima.

Por exemplo, o problema de transformação de *datum* (neste caso, uma transformação a sete parâmetros) em seu tratamento tradicional exige a linearização do problema, iterativamente. Com o Procrustes é requisitado ao usuário tão somente a inserção de coordenadas nos dois diferentes sistemas.

Dadas coordenadas num sistema de referência global (*e.g.* coordenadas GNSS) e coordenadas de um sistema de referência local, o método pode indicar uma solução para o desvio da vertical (AWENGE, 1999a, 1999b). Considerando  $\mathbb{F}^*$  as coordenadas cartesianas do ponto *datum* em um sistema de coordenadas global e  $\mathbb{F}^*$  as coordenadas cartesianas desse mesmo ponto no sistema local têm-se:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n - x_1 & y_n - y_1 & z_n - z_1 \end{bmatrix}_{\mathbb{F}^*} \quad (34)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} X_2 - X_1 & Y_2 - Y_1 & Z_2 - Z_1 \\ X_3 - X_1 & Y_3 - Y_1 & Z_3 - Z_1 \\ X_4 - X_1 & Y_4 - Y_1 & Z_4 - Z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_n - X_1 & Y_n - Y_1 & Z_n - Z_1 \end{bmatrix}_{\mathbb{F}^*} \quad (35)$$

O Procrustes parcial busca exatamente uma solução tal que

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{R} \quad (36)$$

Um tratamento didático, no qual  $\mathbf{A}$  se refere ao sistema local e o sistema  $\mathbf{B}$  ao sistema global, para solucionar  $\mathbf{R}$  é descrito em Schönemann (1996) na forma:

$$\mathbf{S} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B} \quad (37)$$

$$\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{S} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{D}_S \cdot \mathbf{V}^T \quad (38)$$

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^T = \mathbf{W} \cdot \mathbf{D}_S \cdot \mathbf{W}^T \quad (39)$$

$\mathbf{V}$  e  $\mathbf{W}$  são obtidos, por exemplo, por *decomposição de Schur*, descrita em Leon (1999). A matriz de rotação é obtida na forma:

$$\mathbf{R} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{V}^T \quad (40)$$

Que é a matriz de rotação que relaciona  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ .

Por último, calculam-se  $\Lambda$  e  $\Phi$  com base na extração de elementos da matriz  $\mathbf{R}$  na forma:

$$\Lambda = a \tan \left( \frac{R_{32}}{R_{31}} \right), \quad (41)$$

$$\Phi = a \tan \left( \frac{R_{33}}{\sqrt{R_{31}^2 + R_{32}^2}} \right). \quad (42)$$

Outra solução para o Procrustes é encontrada em Awenge (1999a), com a peculiaridade  $\mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{R}^T$  ao invés da (36). Então:

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^T \quad (43)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{U}^T \quad (44)$$

A expressão à direita da igualdade de (43) é obtida por *decomposição em valores singulares* (LEON, 1999). A matriz  $\mathbf{R}$  é obtida de

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}^T. \quad (45)$$

Lembrando que:

$$\xi = \Phi - \varphi \quad (46)$$

$$\eta = (\Lambda - \lambda) \cdot \cos \varphi. \quad (47)$$

São respectivamente a componente meridiana (seundo o meridiano de um dado ponto no sentido Norte-Sul) e componente segundo o 1° vertical (perpendicular a componente meridiana no sentido Este-Oeste).

### 2.3.2 Método de Helmert

A relação diferencial entre a ondulação geoidal e a deflexão da vertical é (HEISKANEN e MORITZ, 1967):

$$dN = -\varepsilon ds \quad (48)$$

$$N_B = N_A - \int_A^B \varepsilon ds \quad (49)$$

$$\varepsilon = -\frac{dN}{ds} \quad (50)$$

A componente vertical  $\xi$  ao longo do meridiano e  $\eta$  ao longo do primeiro vertical determina uma inclinação em relação com azimute geodésico  $\alpha$  expressa como:

$$\varepsilon = \xi \cos \alpha + \eta \operatorname{sen} \alpha \quad (51)$$

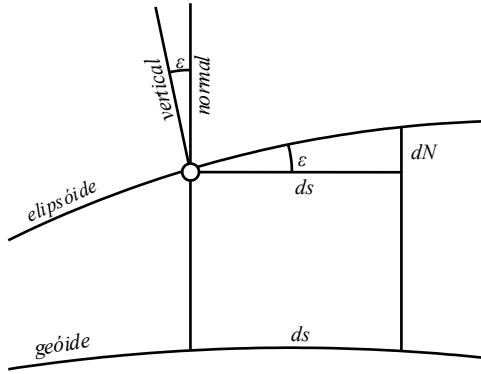


Figura 3. Relação entre a ondulação do geóide e a deflexão da vertical.

combinando as duas equações obtém-se

$$-\frac{dN}{ds} = \xi \cos \alpha + \eta \operatorname{sen} \alpha \quad (52)$$

se considerados os elementos diferenciais em discrepâncias tem-se:

$$-\frac{\Delta N}{\Delta s} \approx \xi \cos \alpha + \eta \operatorname{sen} \alpha . \quad (53)$$

Usando a separação geóide elipsóide (altura geoidal) para dois pontos quaisquer  $A$  e  $B$  sobre a superfície física da Terra expressos em termos da altitude ortométrica  $H$  e elipsoidal  $h$ , então:

$$N_A = h_A - H_A \quad (54)$$

e

$$N_B = h_B - H_B . \quad (55)$$

Subtraindo a equação (54) da equação (55) obtém-se a diferença de altura geoidal entre dois pontos  $\Delta N_{AB}$

$$\Delta N_{AB} = \Delta h_{AB} - \Delta H_{AB} \quad (56)$$

substituindo a equação (56) na equação (53) obtém-se finalmente

$$-\frac{\Delta h_{AB} - \Delta H_{AB}}{\Delta s_{AB}} \approx \xi \cos \alpha_{AB} + \eta \operatorname{sen} \alpha_{AB} . \quad (57)$$

Se forem conhecidas as altitudes ortométricas e as elipsoidais de  $n$  pontos tem-se:

$$-\frac{\Delta h_{ij} - \Delta H_{ij}}{\Delta s_{ij}} \approx \xi \cos \alpha_{ij} + \eta \operatorname{sen} \alpha_{ij} \quad (58)$$

$$i = 0 \text{ e } \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} .$$

dando neste caso, uma solução por mínimos quadrados (MMQ)  $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times 2}$  e  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

### 3 RESULTADOS E CONCLUSÃO

Pelo método procrustes simples foram analisadas duas estratégias, uma baseada na medição LPS (*Local Positioning System*):

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} s_{ij} \cdot \operatorname{sen} z_{ij} \cdot \cos A_{ij} \\ s_{ij} \cdot \operatorname{sen} z_{ij} \cdot \operatorname{sen} A_{ij} \\ s_{ij} \cdot \cos z_{ij} \end{bmatrix}_{\mathbb{F}^*}$$

E medição GPS (*Global Positioning System*):

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} X_j - X_i \\ Y_j - Y_i \\ Z_j - Z_i \end{bmatrix}_{\mathbb{F}^*}$$

empregando-se uma estação total Trimble Zeiss Elta S20 com precisão nominal angular de  $\pm 3''$  e linear de  $\pm(2 \text{ mm} + 2 \text{ ppm})$  avaliou-se as distâncias  $s_{ij}$ , os ângulos zenitais  $z_{ij}$  e as direções  $A_{ij}$  obtendo-se:

Tabela 1 – Dados obtidos com o LPS  $\mathbb{F}^*$ .

Ponto	$x_j - x_0$ (m)	$y_j - y_0$ (m)	$z_j - z_0$ (m)
1-0	0.000	185.185	-5.997
2-0	-152.967	104.130	-5.996
3-0	-184.686	-10.620	-5.995

empregando-se um receptor GPS Leica System 1200 obteve-se:

Tabela 2 – Dados obtidos com o GPS  $\mathbb{F}^*$ .

Ponto	$X_j - X_0$ (m)	$Y_j - Y_0$ (m)	$Z_j - Z_0$ (m)
1-0	3.861	107.096	-151.147
2-0	124.038	134.234	-29.536
3-0	145.399	88.245	72.999

As coordenadas astronômicas curvilíneas obtidas empregando-se as equações (43, 44 e 45) são:

$$\Phi_0 = -25^\circ 27' 00,0026''$$

$$\Lambda_0 = -49^\circ 15' 20,8300''$$

sendo as coordenadas geodésicas curvilíneas:

$$\varphi_0 = -25^\circ 27' 18,2011''$$

$$\lambda_0 = -49^\circ 14' 17,5533''$$

resultando para as componentes do desvio da vertical pelas equações (46 e 47):

$$\xi = 18,20''$$

$$\eta = -57,13'' .$$

Uma outra estratégia baseou-se no STL conforme equações (11) e (12) sendo possível:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} dx_j \\ dy_j \\ dz_j \end{bmatrix}_{\mathbb{F}^*}$$

Sendo  $dz_j$  dado por

$$dz_j = H_j - H_i.$$

Empregando-se o formulário da seção 2.2 obtiveram-se as projeções relativamente à origem para o STL:

Tabela 3 – Dados obtidos com o STL  $\mathbb{F}^*$ .

Ponto	$dx_j$ (m)	$dy_j$ (m)	$dz_j$ (m)
1-0	72.6471	-170.1947	-5.99706
2-0	181.6196	-35.7021	-5.99575
3-0	167.6503	77.8637	-5.99494

As coordenadas astronômicas curvilíneas obtidas empregando-se as equações (43, 44 e 45) são:

$$\Phi_0 = -25^\circ 27' 13,3163''$$

$$\Lambda_0 = -49^\circ 14' 18,8760''$$

resultando para as componentes do desvio da vertical pelas equações (46 e 47):

$$\xi = 4,88''$$

$$\eta = -1,19''.$$

Os parâmetros estimados, ou seja, as componentes do desvio da vertical conforme a equação (58) e os dados da Tabela 4

Tabela 4 – Diferenças de altitudes ortométrica e elipsóidica, distância e azimute geodésico.

De $i$	Para $j$	$\Delta s_{ij}$ (m)	$\alpha_{ij}$	$\Delta h_{ij}$ (m)	$\Delta H_{ij}$ (m)
0	1	185,353	156°40'42,984"	-6.000	-5.997
0	2	186,333	100°59'52,817"	-5.982	-5.996
0	3	186,082	65°13'42,336"	-6.006	-5.995

fornecendo os seguintes valores para as componentes do desvio da vertical:

$$\xi = 4,23''$$

$$\eta = -1,23''.$$

Estas componentes estão referidas ao elipsóide de referência GRS80 e ao geóide que corresponde ao *Datum Vertical Brasileiro* (DVB) materializado pelo conjunto de referências de níveis RN's que compõe a Rede Altimétrica Fundamental Brasileira (RAFB).

Resumidamente tem-se:

Tabela 5 – Resumo dos métodos.

Componentes	Helmert	Procrustes	
		STL	LPS
$\xi$	4,23''	4,88''	18,20''
$\eta$	-1,23''	-1,19''	-57,13''

Os resultados aqui obtidos mostram que o *problema Procrustes simples* funciona tomando como parâmetro o método de Helmert através da formulação simplificada. Nota-se, de forma ainda preliminar, que o método é sensível à precisão nominal do equipamento, pois, conforme o teste aqui efetivado obteve-se um resultado satisfatório com o STL em comparação com LPS para a solução do problema de Procrustes. Recomenda-se no uso deste método, em que se associa LPS com GPS, empregar estações totais com precisão superior ao módulo dos valores da componente; que para o caso em estudo equipamentos com precisão nominal melhor que 1". O método de Helmert, empregando a formulação simplificada (58) pode ser uma saída quando não se dispõe de estação total com precisão angular melhor que 1". Para a aplicação do método de Helmert basta ter um conjunto de RN's, no mínimo duas, que foram niveladas com nivelamento de 1ª ordem e ocupá-las com o GPS, determinando suas altitudes elipsoidais.

Recomenda-se ainda ampliar os estudos e avaliar os modelos globais do geopotencial (e.g. EGM2008, Pavlis 2008) em termos das componentes do desvio da vertical e os modelos locais do geóide disponível para a região, podendo ser uma solução simples e aplicável conforme a necessidade.

## REFERÊNCIAS

ABNT, NBR 13.133. **Execução de Levantamento Topográfico**. Rio de Janeiro, 1993.

ABNT, NBR 14.166. **Rede de Referência Cadastral Municipal-Procedurementos**. Rio de Janeiro, 1998.

AWANGE, J. L.; GRAFAREND, E. W. **Solving Algebraic Computational Problems in Geodesy and Geoinformatics**. Springer. Berlin:2005.

AWANGE, J. L. **Partial Procrustes solution of the threedimensional orientation problem from GPS/LPS observations**. 1999a

AWANGE, J. L. **Integrating the Global Positioning System with the Local Positioning System – The Threedimensional orientation problem**. PhD Thesis, University of Stuttgart. Stuttgart: 1999b.

GARNÉS, S. J. A. **Sistema de projeção e orientação de plantas topográficas**. In.: Congresso Brasileiro de Cadastro Técnico Multifinalitário. Florianópolis – SC. 1998.

HEISKANEN, W. A.; MORITZ, H. **Physical Geodesy**. Reprint Institute of Physical Geodesy, Technical University, Austria, 1967.

LEICK, A. **GPS satellite surveying**. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1994. 560p.

LEON, STEVEN J. **Álgebra Linear com Aplicações**. LTC. Rio de Janeiro:1999.

SCHÖNEMANN, P. H. **A generalized solution of the orthogonal procrustes problem**. Psychometrika, Vol 31- No. 1 March 1966.

STRANG, G.; KAI, B. **Linear Algebra, Geodesy, and GPS**. Wellesley MA: Wellesley–Cambridge Press, 1997. 624p.