

AVALIAÇÃO DO EARTH GRAVITY MODEL 2008 (EGM2008) PARA A REGIÃO DO DATUM VERTICAL BRASILEIRO

VAGNER GONÇALVES FERREIRA
KAROLINE PAES JAMUR
SILVIO ROGÉRIO CORREIA DE FREITAS

Universidade Federal do Paraná - UFPR
Curso de Pós-graduação em Ciências Geodésicas - CPCG
{vgf, karol.mestrado, sfreitas}@ufpr.br

RESUMO - Este trabalho apresenta a análise quantitativa da resolução espacial do *Earth Gravity Model* 2008 (EGM2008) em termos de comparações entre valores observados de distúrbios da gravidade e da altura quase-geoidal advinda de modelos locais (e.g. GPS/Nivelamento), confrontando-os com os valores advindos dos modelos globais. O EGM2008 contém o potencial expresso em harmônicos esféricos até o grau e ordem 2160, implicando em uma alta resolução espacial (~9 km) para as informações advindas do campo da gravidade. Truncado em vários graus e ordens neste caso, objetiva-se avaliar o melhor desenvolvimento para a região compreendida entre as latitudes $-30,74 \leq \varphi \leq -25,74$ e longitudes $-51,16^\circ \leq \lambda \leq -46,16^\circ$ com vistas à unificação de redes altimétricas locais a um Sistema Global de Altitudes.

ABSTRACT - This paper presents a quantitative analysis of the spatial resolution of Earth Gravity Model 2008 (EGM2008) in terms of comparisons between observed values of disturbances of gravity and quasi-geoid height originated from local models (e.g. GPS/Leveling), confronting them with the values arising from global models. The EGM2008 contains the potential expressed in spherical harmonics to the degree and order 2160, resulting in a high spatial resolution (~9 km) to the information coming from the gravity field. Truncated in various degrees and orders in this case, for evaluating the best development for the region between the latitudes $-30.74 \leq \varphi \leq -25.74$ and longitudes $-51.16^\circ \leq \lambda \leq -46.16^\circ$ aiming the unification of local vertical networks to one Global Height System.

1 INTRODUÇÃO

O geóide definido como a superfície equipotencial do campo da gravidade melhor ajustada ao Nível Médio do Mar (NMM); difere da superfície média dos oceanos por uma grandeza linear designada por Topografia do Nível Médio do Mar (TNMM). A esta diferença, deve-se uma das principais causas da discrepância entre o NMM em diferentes marégrafos da costa brasileira e conseqüentemente a incompatibilidade entre os dois *data* altimétricos ora em uso no Brasil (Imbituba, SC e Santana, AP). Os vários *data* altimétricos, definidos pelo nível médio do mar em uma dada referência temporal são por definição *data* locais com geopotencial W_i . Para a unificação de *data* locais a um *Datum* global, com geopotencial W_0 , que deve atender a condição:

$$\int_s (W_i - W_0)^2 dS = \text{mínimo}, \quad (1)$$

Esta definição de geóide é a mais aceita na atualidade e remonta a Gauss-Listing (Heck, 2004). Nela, faz-se necessário o conhecimento da diferença de potencial ΔW

$= W_i - W_0$ e o valor da gravidade normal γ_i para o *i*-ésimo marégrafo em questão (e.g. Imbituba).

A relação do *Datum* Vertical Brasileiro (DVB) com W_0 ocorre através do potencial da gravidade W_{DVB} e a diferença entre estes dois geopotenciais fornece a TNMM

$$TNMM = \frac{W_{DVB} - W_0}{\gamma_{DVB}}. \quad (2)$$

Heck e Rummel (1990) propõem algumas estratégias que permitem estimar a TNMM em pontos costeiros a partir de algumas estratégias de associação de observações terrestres, oceânicas e oriundas de plataformas orbitais. Segundo Freitas *et al.* (2002), esta diferença é, geralmente, devida a características anômalas locais do geopotencial que devem ser analisadas do ponto de vista da interação oceano/continente.

Com densificação gravimétrica no entorno do *datum*, poder-se-á conhecer o campo da gravidade local com o objetivo da determinação da parcela relativa das contribuições locais devidas às massas continentais anômalas. Já para a parte oceânica deve ser dado outro

enfoque, principalmente com base em gravimetria oceânica e altimetria por satélites.

A representação do potencial gravitacional da Terra através de séries harmônicas esféricas tem sido um dos objetivos da comunidade geodésica há mais de 40 anos. Dados obtidos a partir de observações dos satélites e dados gravimétricos de superfície têm possibilitado uma maior e mais precisa representação do geopotencial. A combinação destes dados permitiu o cálculo dos coeficientes do modelo global do:

- Longo comprimento de onda do geóide (coeficientes do geopotencial global);
- Médio comprimento de onda do geóide (baseado nas anomalias da gravidade) ; e
- Curto comprimento de onda do geóide (inclui efeitos do terreno).

Isto significa que estes modelos podem solucionar características do geóide com um comprimento de onda de até meio grau (cerca de 55 km) (LEMOINE *et al.*, 1996).

As atividades realizadas no *Datum Vertical Brasileiro DVB* compreendem determinações de valores da gravidade no entorno do mesmo sobre as referências de nível (RN's) associadas com o *Global Positioning System* (GPS); observações do nível do mar por altimetria satélite e maregráfos implantados na costa (LUZ, 2008 e DALAZONA, 2005).

A área de estudos compreende as latitudes $-30,74^\circ \leq \varphi \leq -25,74^\circ$ e longitudes de $-51,16^\circ \leq \lambda \leq -46,16^\circ$ e pode ser visualizada na Figura 1.

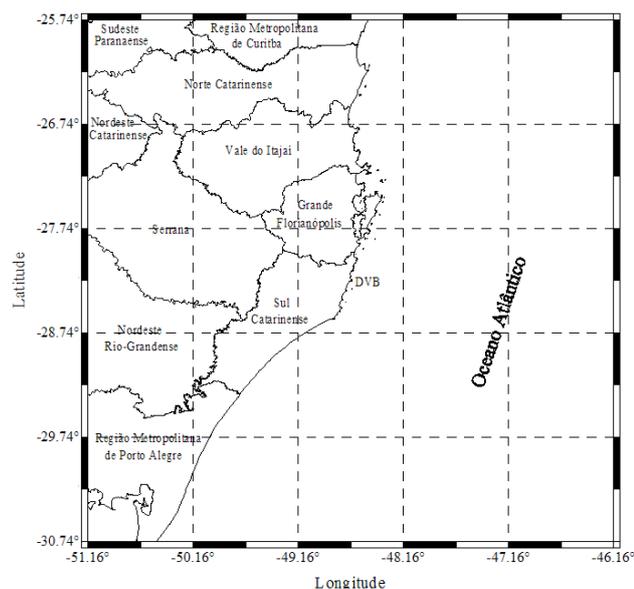


Figura 1 – Área de estudo.

Os estudos realizados nesta área de $5^\circ \times 5^\circ$, com o centro no DVB ($-28,24^\circ, -48,66^\circ$), visam a determinação da TNMM a partir de uma análise mais ampla da integração oceano/continente (FREITAS *et al.* 2007). Nesta área, devido a sua abrangência, será possível trabalhar com os Modelos Global do Geopotencial (MGG) desenvolvidos até o grau e ordem 70, sendo calculados somente de dados advindos da análise de órbitas de satélite.

No contexto de conexão de *data* vertical conforme discutido em Burša *et al.* (2002) pode ser realizada de um ponto de vista da parte costeira sobre as referências de nível com altitudes físicas (*e.g.* altitudes normais) com altitudes elipsóidicas que cobre uma área suficientemente ampla para que a média dos erros do modelo global do geopotencial seja insignificante.

Segundo DALAZONA (2005), erros relativos à estimativa da TNMM são provenientes em sua maioria de erros do modelo geoidal, ou seja, a estimativa para a TNMM está limitada a erros no conhecimento do campo da gravidade. A autora ainda enfatiza algumas melhorias que podem ser dadas em modelos globais do geopotencial, dentre elas a densificação com posicionamento GPS associada à gravimetria na região de estudos.

2 MODELOS GLOBAL DO GEOPOTENCIAL

Um Modelo Global do Geopotencial compreende um conjunto completo dos coeficientes harmônicos normalizados com o comprimento de onda com características do campo da gravidade externo da Terra.

A altura quase-geoidal ζ é calculada a partir do MGG usando a equação (3) e a anomalia da gravidade Δg a partir da equação (4) (TORGE, 2001):

$$\zeta_n(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r\gamma} \sum_{n=2}^n \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n \left(\frac{\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda}{\Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda} \right) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \quad (3)$$

$$\Delta g_M(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r^2} \sum_{n=2}^n \left(\frac{a}{r}\right)^n (n-1) \sum_{m=0}^n \left(\frac{\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda}{\Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda} \right) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \quad (4)$$

Onde, GM é o a a constante gravitacional geocêntrica; γ é a gravidade normal sobre a superfície do elipsóide de referência; (r, θ, λ) são respectivamente o raio vetor geocêntrico, a co-latitudes e a longitude para um ponto sobre a superfície terrestre; a o semi-eixo maior para o elipsóide de referência; $\bar{P}_{nm}(\cos \theta)$ são as funções associadas de Legendre para um grau n e ordem m ; \bar{C}_{nm} e \bar{S}_{nm} são os coeficientes harmônicos esféricos normalizados para o MGG.

Para o EGM2008 tem-se os seguintes valores numéricos (PAVLIS *et al.*, 2008):

$$GM = 3986004,415 \times 10^8 \text{ m}^3\text{s}^{-2}$$

$$a = 6378136,3 \text{ m}.$$

A mais alta resolução atingível de um modelo global do geopotencial na superfície da Terra é determinada pelo seu grau máximo, $n_{m\acute{a}x}$. O comprimento de onda máximo é dado aproximadamente por:

$$\lambda_{m\acute{a}x} \approx \frac{2\pi R}{n_{m\acute{a}x}} \cos \varphi \quad (5)$$

a resolução máxima dos modelos globais do geopotencial é igual à metade do comprimento máximo de onda

$$\rho_{m\acute{a}x} = \frac{\pi R}{n_{m\acute{a}x}} \cos \varphi \quad (6)$$

portanto, assumindo um raio terrestre $R = 6.378,137 \text{ km}$, a resolução máxima atingível a partir de certo grau 360 (e.g. EGM96; LEMOINE *et al.*, 1998) é de aproximadamente 55 km no equador. Para o DVB, latitude aproximada de $-28,24^\circ$ a resolução máxima é de aproximadamente 49 km.

A determinação da altura geoidal com o uso do MGG é dada pela formula geral (RAPP 1997):

$$N = \zeta + \frac{\Delta g - 0,1119H}{\bar{\gamma}} H + N_0 \quad (7)$$

onde ζ e Δg é a altura quase-geoidal e a anomalia da gravidade respectivamente calculados até um dado grau máximo ($n_{m\acute{a}x}$); o termo N_0 representa a contribuição do harmônico de grau zero. O termo de ordem zero (N_0) é calculado por (HEISKANEN e MORITZ 1967):

$$N_0 = \frac{GM - GM_0}{R\gamma} - \frac{W_0 - U_0}{\gamma} \quad (8)$$

onde o parâmetro GM_0 e U_0 corresponde ao GRS80 (MORITZ, 1992):

$$GM_0 = 39868600,5000 \times 10^9 \text{ m}^3\text{s}^{-2}$$

$$U_0 = 62636860,85 \text{ m}^2\text{s}^{-2}.$$

3 AVALIAÇÃO DO MODELO GLOBAL DO GEOPOTENCIAL

O modelo geopotencial EGM2008 da *US National Geospatial-Intelligence Agency* (Pavlis *et al.* 2008) está completo até o grau e ordem 2159 dos coeficientes harmônicos esféricos e resolve assim os curtos comprimentos de ondas do geóide e da anomalia da gravidade, podendo ser estendido até o grau 2190 e ordem 2159. O EGM2008 incorpora dados de anomalias da gravidade que tem beneficiado as mais recentes soluções via missões dos satélites GRACE. Incorpora também dados altimétricos derivados utilizando PGM2007B (uma variante do PGM2007A) e o modelo *Dynamic Ocean Topographic* (DOT) como referência. Foi utilizado o ITG-

GRACE03S (MAYER-GÜRR, 2007), juntamente com o seu erro complementar da matriz covariância para $n_{m\acute{a}x} = 180$ e ajustamento por mínimos quadrados em termos de coeficientes harmônicos, a fim de combinar informações somente da missão GRACE com os coeficientes implícitos exclusivamente por dados terrestres.

O EGM2008 está disponível para o potencial externo da Terra, levando a um nível sem precedentes da amostragem da resolução espacial ($\sim 9 \text{ km}$) para o campo da gravidade ao longo de todo globo. Esse passo revolucionário contribui para a continuação dos esforços da comunidade geodésica nos últimos anos (e após o lançamento dos satélites das missões CHAMP e GRACE) para uma alta resolução e alta precisão do modelo do campo gravitacional da Terra de referência estática. Além disso, fornece uma ferramenta indispensável para apoiar novos estudos do campo da gravidade e outros estudos, especialmente tendo em conta a futura missão GOCE (prevista para lançamento em setembro de 2008) e os desenvolvimentos contínuos do *Global Geodetic Observing System* (GGOS).

Os modelos globais da gravidade são importantes nas determinações locais do geóide (ou do quase-geóide), pois permitem a definição e realização de um sistema de altitude mundial especificado pelo geopotencial global (BURŠA *et al.*, 1999, BURŠA *et al.* 2001, BURŠA *et al.* 2002, BURŠA *et al.* 2004, BURŠA *et al.* 2007). Este geóide (ou quase-geóide) é dependente do conhecimento do geopotencial via um modelo global que expressa as componentes anômalas locais com determinada resolução, no entanto insuficiente para a definição do nível de referência local.

Os modelos globais da gravidade de grau baixo são determinados, principalmente, a partir da análise de órbitas de satélites até o grau e ordem 70; combinando-se estes dados com observações terrestres da gravidade (aéreos, marinhos e continentais) e dados de altimetria por satélites (anomalias da gravidade ou alturas geoidais) permitem a obtenção de modelos com maior resolução, na atualidade com grau e ordem de até 2160.

A principal desvantagem da inclusão de valores de anomalias da gravidade terrestre, é que as mesmas refletem inconsistências dos *data* verticais locais, pois são as referências para a redução da gravidade medida na superfície física da Terra.

As análises aqui realizadas são efetivadas em termos de comparações entre valores observados de distúrbios da gravidade e da altura geoidal e quase-geoidal advinda de modelos locais (e.g. GPS/Nivelamento), confrontando-os com os valores advindos dos modelos globais. O sistema utilizado para as comparações foi o GRS80.

3.1 Distúrbios gravidade

Para a avaliação das anomalias locais do geopotencial (EGM2008) foram empregados os distúrbios da gravidade que correspondem a mais de 1000 pontos de validação. Nas Figuras 2, 3 e 4 podem-se visualizar os

distúrbios da gravidade do modelo EGM2008 desenvolvido até o seu grau máximo, 2160; EGM2008 desenvolvido até o seu grau 360, EGM96 desenvolvido até o seu grau máximo, 360, respectivamente.

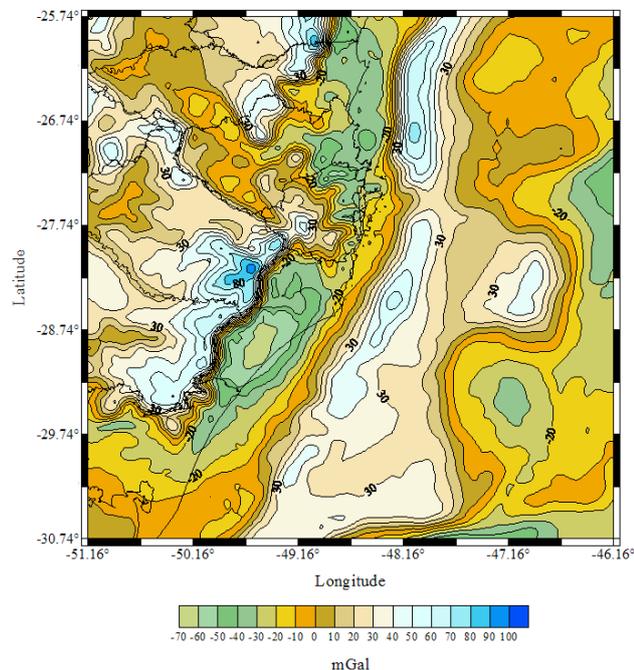


Figura 2 – Distúrbio da gravidade do modelo EGM2008 ($n_{máx} = 2160$).

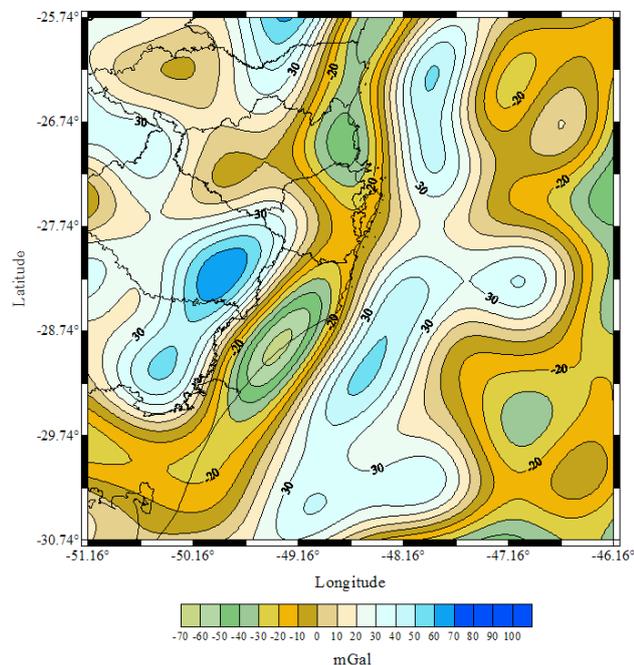


Figura 3 – Distúrbio da gravidade do modelo EGM2008 ($n_{máx} = 360$).

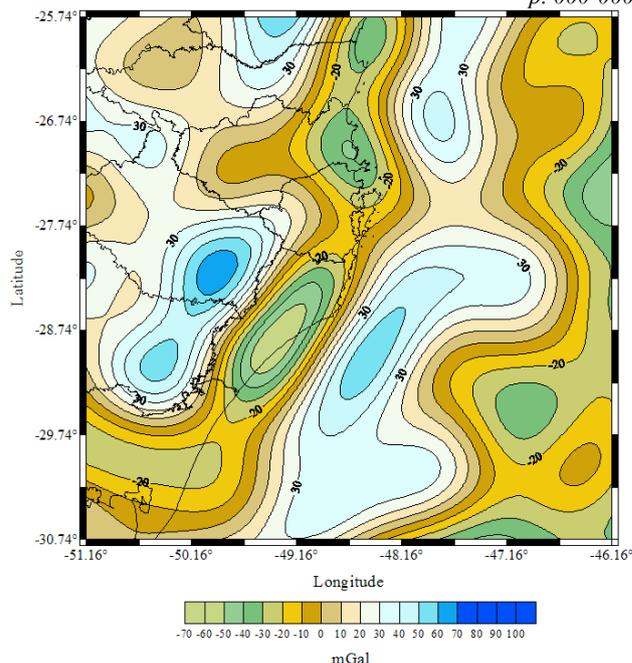


Figura 4 – Distúrbio da gravidade do modelo EGM96 ($n_{máx} = 360$).

As anomalias da gravidade relacionam-se com os distúrbios da gravidade através da altura geoidal N na forma (HOFMANN-WELLENHOF & MORITZ, 2006):

$$\delta g = \Delta g - \frac{\partial \gamma}{\partial h} N \quad (9)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial h} \approx -0,3086 \text{ mGal m}^{-1}. \quad (10)$$

Para a transformação das anomalias da gravidade em distúrbios conforme a equação (9) necessita-se da altura geoidal que neste caso foi determinada através do MAPGEO2004 (IBGE, 2008). Os dados de anomalias da gravidade foram cedidos do banco de dados da Universidade de São Paulo (USP), as altitudes destes dados segundo informações desta instituição são as ortométricas. Um conjunto de pontos, cerca de 250, além destes cedidos pela USP foram levantados pelo Laboratório de Referenciais Geodésicos e Altimetria por Satélites (LARAS), alguns destes pontos coincidem com RN's, sendo neste caso conhecido as suas altitudes ortométricas e elipsoidais.

Os dados de campo cobrem apenas uma porção da área de estudos que conforme pode ser visualizada nas Figuras 5, sendo esta representando os distúrbios gravidade para a região do DVB.

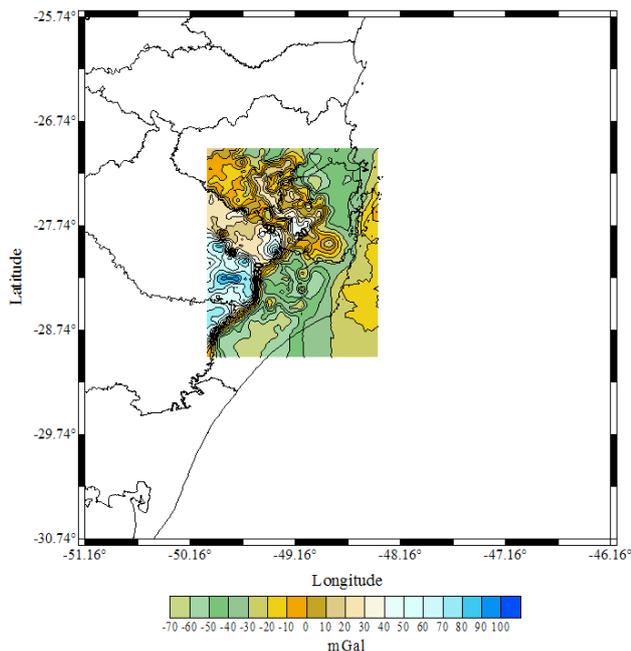


Figura 5 – Distúrbio da gravidade para as observações em campo.

As estatísticas destas diferenças para o modelo global EGM2008 bem como o EGM96 e os dados de campo estão resumidos na Tabela 1.

Tabela 1 – Estatísticas das diferenças do distúrbio da gravidade (mGal) entre observações e modelo.

MGG	EGM2008 ($m_{m\acute{a}x} = 2160$)	EGM2008 ($m_{m\acute{a}x} = 360$)	EGM96 ($m_{m\acute{a}x} = 360$)
máx.	34,888	59,315	68,629
mín.	-120,347	-117,216	-114,339
média	-6,647	-11,194	-9,342
RMS	15,005	23,657	22,820

Percebe-se pelas comparações mostradas na Tabela 1 que há diferença evidenciada entre os MGG's os dados de campo para a região de estudos. Porém, essa precisão do modelo estimada pelo *root mean squared* (RMS) para os distúrbios evidencia que a inconsistência do modelo para a região pode ser associada à componente anômala do geopotencial.

3.2 Alturas Quase-geoidais

As alturas quase-geoidais do modelo EGM2008 foram determinadas com o programa disponível no *International Centre for Global Earth Models* (ICGEM) (<http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/ICGEM.html>), utilizando os respectivos coeficientes do modelo geopotencial (Figura 6).

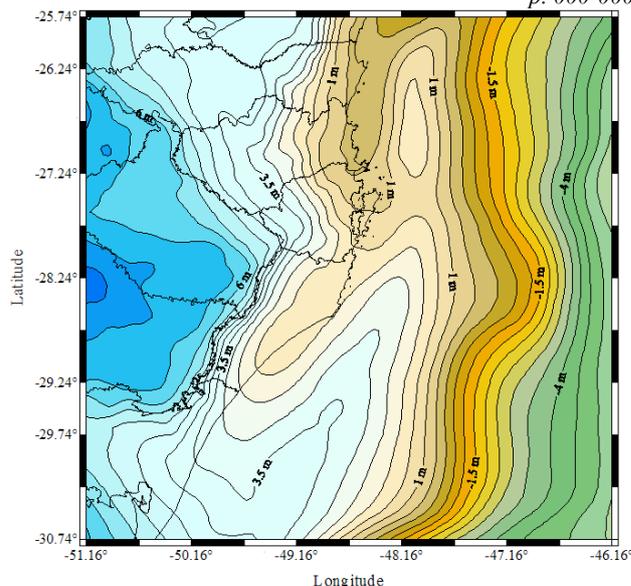


Figura 6 – Alturas quase-geoidais do modelo EGM2008.

Com o programa, disponível no sítio do ICGEM, foi possível avaliar o modelo geopotencial em vários graus e ordens para verificar o que mais se adéqua à região de estudo. Deste modo, calculou-se a altura quase-geoidal de cada ponto com o modelo truncado em grau e ordem de 360, e em seguida em grau e ordem máximo 2160 para o EGM2008.

Comparou-se a altura quase-geoidal obtida através do GPS/Nívelamento (ζ_{GPS}) com os valores dados pelo modelo ($\zeta_{EGM2008}$). As discrepâncias de alturas geoidais encontradas nesta comparação foram analisadas para diagnosticar o quanto o modelo EGM2008 está afastado do *datum* vertical, função do grau e da ordem.

A Tabela 2 mostra as diferenças entre o EGM2008, o EGM96 relativamente ao DVB nos pontos de referência.

Tabela 2 – Estatísticas das diferenças MGG/GPS.

MGG	EGM2008 ($m_{m\acute{a}x} = 2160$)	EGM2008 ($m_{m\acute{a}x} = 360$)	EGM96 ($m_{m\acute{a}x} = 360$)
máx.	0,032	0,044	0,113
mín.	-0,694	-0,686	-0,617
média	-0,287	-0,272	-0,210
RMS	0,338	0,330	0,277

Os pontos para esta estimativa preliminar apresentar uma distribuição que mais se adéqua a preconizada em Burša *et al* (2002) para a determinação de efeitos anômalos na parte continental ao longo de linhas de nívelamento.

Selecionou-se neste caso, como melhor opção de grau e ordem para o EGM2008 àquele que proporcionou menor RMS com a menor média das diferenças, a saber, o grau e ordem 360. O EGM96 quando comparado com o EGM2008 apresentou uma melhor adequação ao DVB em termos de média e RMS.

4 CONCLUSÕES

O *Earth Gravity Model* 2008 (EGM2008) foi avaliado em função dos distúrbios da gravidade e de dados GPS/Nivelamento, para tanto, utilizou-se a *média* e o *RMS* das diferenças. A análise foi realizada no grau máximo 2160 e no grau 360 para o EGM2008, para o EGM96 utilizou-se o grau máximo 360. Para o EGM2008 desenvolvido até o grau máximo (2160) houve uma melhoria relativa em termos dos distúrbios da gravidade, que pode ser observada pela *média* e o *RMS* contidos na Tabela 1. A *média* tende a zero para os dados do distúrbio da gravidade à medida que se aumenta a resolução do modelo EGM2008 tornando-a superior a menor dimensão da área de estudos. A área que contém os dados terrestres de observações dos distúrbios da gravidade têm dimensões aproximadas de 1,5° X 2,0°.

Para os dados GPS/Nivelamento, neste caso avaliaram-se as alturas quase-geoidais (ζ_{GPS}) com os valores fornecidos pelo modelo através da equação (4) ($\zeta_{EGM2008}$ e ζ_{EGM96}). As estatísticas contidas na Tabela 2 mostram que o EGM96 apresentou uma melhor adequação ao DVB, apresentando uma menor *média* e um menor *RMS* em relação ao EGM2008. O baixo desempenho do modelo EGM2008 em seu grau máximo pode estar associado ao fato da alta resolução do modelo para o DVB ser puramente matemática. Nesta região há uma carência de dados observados como GPS/Nivelamento e gravimetria.

REFERÊNCIAS

- BURŠA, M., KOUBA, J., KUMAR, M., MÜLLER, A., RADĚJ, K., TRUE, S.A., VATRT, V., VOJTÍŠKOVÁ, M. **Geoidal Geopotential and World Height System**. *Studia Geophysica et Geodaetica*. Praga, v. 43, n. 4. p. 327-337, 1999.
- BURŠA, M., KOUBA, J., MÜLLER, A., RADĚJ, K., TRUE, S.A., VATRT, V., VOJTÍŠKOVÁ, M. **Determination of Geopotential Differences Between Local Vertical Datums and Realization of a World Height System**. *Studia Geophysica et Geodaetica*. Praga, v. 45, n. 2. p. 127-132, 2001.
- BURŠA, M., KENYON, S., KOUBA, J., RADĚJ, K., VATRT, V., VOJTÍŠKOVÁ, M., ŠIMEK, J. **World Height System Specified by Geopotential at Tide Gauge Stations**. In: DREWES, H., DOODSON, A.H., FORTES, L.P.S., SÁNCHEZ, L., SANDOVAL, P. (Ed.) *Vertical Reference Systems*. IAG Symposium, Cartagena, Colombia. Berlin, Springer-Verlag, 2002. pp.291-296.
- BURŠA, M., KOUBA, J., KUMAR, M., MÜLLER, A., RADĚJ, K., TRUE, S.A., VATRT, V., VOJTÍŠKOVÁ, M. **A Global Vertical Reference Frame Based On Four Regional Vertical Datums**. *Studia Geophysica et Geodaetica*. Praga, v. 48, n. 4. p. 493-502, 2004.
- BURŠA, M., KENYON, S., KOUBA, J., ŠIMA, Z., VATRT, V., VÍTEK, V. VOJTÍŠOVÁ, M. **The geopotential value W_0 for specifying the relativistic atomic time scale and a global vertical reference system**. *Journal of Geodesy*, no 81: 103-110. 2007.
- DALAZOANA, R. (2005). **Estudos Dirigidos à Análise Temporal do Datum Vertical Brasileiro**. Tese de Doutorado, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. Universidade Federal do Paraná. 188 p.
- FREITAS, S.R.C.de; MEDINA, A.S; LIMA, S.R.S.de. **Associated Problems to Link South American Vertical Networks and Possible Approaches to face Them**. *VeRes, Springer, Berlin*, 318-323p. 2002.
- HECK, B., RUMMEL, R. **Strategies for solving the vertical datum problem using terrestrial and satellite geodetic data**. In: *Sea Surface Topography and the Geoid*. Ed. Sünkel, H., Baker, T.. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, pp. 116-128. 1990.
- HECK, B. **Problems in the Definition of Vertical Reference Frames**. In: Sansò F (ed) *V Hotine-Marussi Symposium on Mathematical Geodesy (IAG Symposia, vol.127)*. Springer, Berlin, pp. 164-173. 2004.
- HEISKANEN, W. A.; MORITZ, H. **Physical geodesy**. W. H. Freeman, San Francisco, 1967.
- HOFMANN-WELLENHOF, B., MORITZ, H. **Physical Geodesy**. Springer- Wien-New York. 403p. 2006.
- LEMOINE, F. G., et al. **The Development of the NASA GSFC and NIMA joint Geopotential Model**. INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON GRAVITY, GEOID, AND MARINE GEODESY, (Gageomar 1996), University of Tokyo, Japan, 1996.
- LEMOINE, F. KENYON, S. FACTOR, J. TRIMMER, R. PAVLIS, N. CHINN, D. COX, C. KLOSKO, S. LUTHCKE, S. TORRENCE, M. WANG, Y. WILLIAMSON, R. PAVLIS, E. RAPP, R. OLSON, T. **The development of the joint NASA – GSFC and the NIMA Geopotential Model EGM 96**. NASA/TP – 1998 – 206861. 1998.
- LUZ, R.T. **Estratégias Para a Modernização da Componente Vertical do Sistema Geodésico Brasileiro e Sua Integração ao SIRGAS**. Curitiba. 179 f. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas) – Setor de Ciências da Terra, Universidade Federal do Paraná. 2008.
- MAYER-GÜRR, T. **ITG-Grace03s: The latest GRACE gravity field solution computed in Bonn**. Joint International GSTM and DFG SPP Symposium. Outubro 2007, Potsdam 2007.

MORITZ, H. **Geodetic Reference System 1980**. Bull Geod, 62(2): 187-192. 1992.

PAVLIS, N.K., S.A. HOLMES, S.C. KENYON, AND J.K. FACTOR, **An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008**, presented at the 2008 General Assembly of the European Geosciences Union, Vienna, Austria, April 13-18, 2008.

RAPP, R.H, **Use of potential coefficient models for geoid undulation determinations using a spherical harmonic representation of the height anomaly/geoid undulation difference**. J Geod, 71: 282-289. 1997.

TORGE, W.. **Geodesy**. 3rd compl. rev. and ext. ed., Walter de Gruyter, Berlin, ISBN 3-11-017072-8, 2001.