

# DETERMINAÇÃO DE ALTITUDES NORMAIS ATRAVÉS DO POSICIONAMENTO GNSS PARAMETRIZADO PELO POTENCIAL PERTURBADOR

VAGNER GONÇALVES FERREIRA  
SILVIO ROGÉRIO CORREIA DE FREITAS

Universidade Federal do Paraná - UFPR  
Curso de Pós-graduação em Ciências Geodésicas - CPCG  
{vgf, sfreitas}@ufpr.br

**ABSTRACT** – The main objective of this paper aims to provide a discussion on the possibility to determine physical heights with association of measurements of the global navigation satellite system (GNSS) associated with determining the value of gravity. A strategy for achieving this goal is determining the potential anomalous ( $T$ ) by iterative solution according to the disturbance of gravity. This approach is in line with the solution to the formulation of the Geodetic Boundary Value Problem proposed by Molodenskii. However, some additional considerations must be established. Among them, the choice of a height system compatible. In this regard keeping up the normal height system of Molodenskii.

## 1 INTRODUÇÃO

O GNSS, acrônimo de *Global Navigation Satellite System*, iniciou uma nova fase no posicionamento por satélites, substituindo as técnicas tradicionais, e abrindo a possibilidade para um número inesgotável de aplicações, sendo uma delas o nivelamento. A combinação do nivelamento empregando o GNSS com determinações associadas ao campo da gravidade pode substituir os métodos clássicos de nivelamento na maioria dos casos e gerar vários benefícios tais como alta precisão, rapidez, simplicidade operacional e baixo custo. A ampla difusão do GNSS, especialmente com o emprego do GPS (*Global Positioning System*), para a determinação de altitudes precisas faz com que o geóide ou o quase-geóide se torne um produto de relevante importância às mais diversas aplicações.

O GPS fornece as coordenadas em um Sistema Geodésico de Referência (SGR), como por exemplo, coordenadas geodésicas curvilíneas ( $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $h$ ). Como a altitude elipsóidica ( $h$ ) obtida com o GPS é referenciada ao elipsóide, para se ter a altitude ortométrica ( $H^O$ ) é necessário o conhecimento da altura geoidal ( $N$ ), de preferência com uma precisão equivalente àquela obtida com o GPS. A relação entre a altitude elipsóidica e a altitude ortométrica é dada por (HEISKANEN e MORITZ, 1967):

$$H^O = h - N . \quad (1)$$

A altura geoidal pode ser obtida através da combinação de um modelo do geopotencial com dados gravimétricos da superfície, ou através de observações

GPS quando conduzidas sobre referências de nível RNs (FEATHERSTONE *et al.*, 1998).

Por enquanto o fator limitante da determinação da altitude ortométrica por GPS é a obtenção de um modelo geoidal com acurácia compatível a do nivelamento de precisão motivo pelo qual vêm-se buscando outras alternativas para contornar tal limitação.

Apesar de existirem vários trabalhos com aplicações do GPS no nivelamento, tais como o de Zilkoski (1990); o de Dodson (1995); o de Colier (1997); o de Featherstone *et al.* (1998); o de Pan e Sjöberg (1998); o de Duquenne (1999); e o de Kenyeres (1999); e o de Fotopoulos (2003), nenhum aborda especificamente o tema sobre a determinação de altitudes sem a pré-existência de um modelo geoidal ou quase geoidal.

De acordo com a teoria de Molodenskii a determinação da figura da Terra e a altitude elipsóidica podem ser determinadas da seguinte forma (HEISKANEN e MORITZ, 1967):

$$h = H^N + \zeta \quad (2)$$

em que  $H^N$  é a altitude normal e  $\zeta$  é a anomalia de altura ou altura quase-geoidal.

Ardalan e Grafarend (2004) reconheceram a potencialidade da utilização de números geopotenciais para a determinação do geóide empregando a *continuação descendente* para reduzir o potencial perturbador da superfície terrestre ao geóide. Sjöberg (2006) desenvolveu uma técnica para determinar altitudes ortométricas a partir do posicionamento por GNSS e números geopotenciais;

ou seja, propõe um método para reduzir a anomalia de altura ( $\zeta$ ) à altura geoidal ( $N$ ).

Associando o posicionamento GPS com levantamentos gravimétricos torna-se possível determinar altitudes físicas (e.g. normal), independente da determinação de modelos geoidais pré-definido. Uma saída para tal problema é o conhecimento do potencial perturbador ou do potencial anômalo ( $T$ ), que é determinado com as observações da gravidade associada ao posicionamento GPS.

A partir da altitude elipsóidica e do valor da gravidade para um dado ponto sobre a superfície física da Terra torna-se possível determinar o potencial anômalo de forma iterativa (FREITAS *et al.*, 2007). A fórmula de Bruns relaciona o potencial anômalo à gravidade normal, se esta for calculada sobre o elipsóide de referência tem-se a altura geoidal; se em um ponto  $Q$  onde  $W_P = U_Q$  ter-se-á a anomalia de altura ou altura quase-geoidal ( $\zeta$ ). A partir destes elementos torna-se factível a determinação de altitudes com caráter físico.

## 2 METODOLOGIA

A altitude normal utiliza uma superfície auxiliar, o teluróide (Figura 1), que pode ser encontrada utilizando o número geopotencial através da condição de Molodenskii. A altitude Normal é a distância contada ao longo da linha de campo relativa ao modelo Terra normal que vai do elipsóide ( $Q_0$ ) até o teluróide ( $Q$ ), doravante denominada de *linha vertical normal* (Figura 1). Como uma boa aproximação pode-se medi-la ao longo da normal do elipsóide que passa no ponto  $P$  na superfície física.

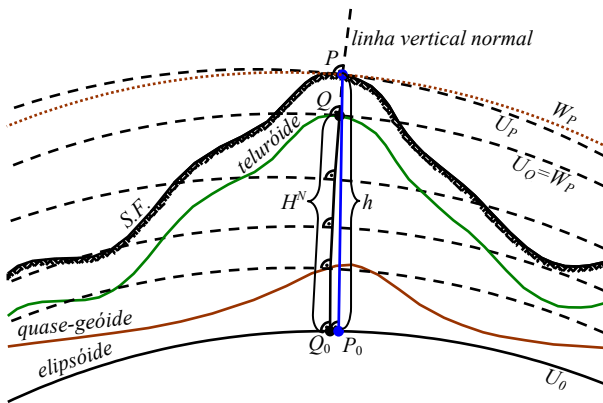


Figura 1 – Altitude normal.

No campo da gravidade normal,  $Q$  deverá ter a mesma diferença de potencial ( $C$ ) com respeito ao elipsóide de nível (Terra Normal,  $U_0$ )

$$C_P = U_0 - U_Q = W_0 - W_P \quad (3)$$

em que  $W_0$  e  $W_P$  são o geopotencial no ponto *Datum* e o geopotencial sobre a superfície física que contém o ponto  $P$  respectivamente;  $U_0$  é o esferopotencial sobre o elipsóide adotado ( $U_0 = W_0$ ),  $U_Q$  é o potencial normal no ponto  $Q$

sobre o teluróide; o ponto  $P$  e  $Q$  estão situados ao longo da linha de campo relativa ao modelo Terra Normal; a distância  $\overline{PQ}$  representa a anomalia de altura. A altitude normal proposta em 1954 por Molodenskii para um ponto na superfície física é:

$$H_P^N = \frac{W_0 - W_P}{\bar{\gamma}} \quad (4)$$

sendo  $\bar{\gamma}$  a gravidade média normal ao longo da linha vertical normal (linha de campo associada ao modelo Terra Normal), pode ser obtida pela expressão:

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{H_P^N} \int_0^{H_P^N} \gamma(h) dh \quad (5)$$

a equação (5) tem a solução iterativa em função da altitude normal, devido ao fato da dependência da gravidade normal média ser em função da altitude normal.

Em um curto período de tempo, o desenvolvimento de modernas técnicas de posicionamento por satélites artificiais levou a uma simples aplicação da equação (2) da seguinte forma:

$$\zeta = h - H^N \quad (6)$$

Ela permite determinar a altura quase geoidal se  $h$  e  $H^N$  são conhecidos nos mesmos pontos.

Mas como determinar a anomalia de altura se o objetivo é determinar a altitude do ponto em questão? Neste caso sendo conhecida somente a altitude geodésica proveniente de posicionamento GPS e o valor da gravidade observado.

Introduzindo o conceito de potencial perturbador ou potencial anômalo  $T$ , que é a diferença entre o potencial da gravidade real ( $W$ ) e o potencial da gravidade normal ( $U$ ), tal que

$$T(x, y, z) = W(x, y, z) - U(x, y, z) \quad (7)$$

Considerando a gravidade no ponto  $P$  e a gravidade normal neste mesmo ponto tem-se para a diferença entre esses dois valores o distúrbio da gravidade:

$$\delta g = g_P - \gamma_P \quad (8)$$

caso o valor da gravidade observada na superfície física seja reduzida ao geóide e a gravidade normal avaliada sobre o elipsóide de referência temos para esta diferença a anomalia da gravidade:

$$\Delta g = g_0 - \gamma_0 \quad (9)$$

A determinação da gravidade normalmente é feita sobre a superfície física da Terra. Então, o valor de  $g_0$  no geóide é obtido através de reduções do valor da gravidade, o que envolve, como no caso do campo da gravidade normal, hipóteses simplificativas.

Sendo:

$$T_P = W_P - U_P \quad (10)$$

$$\delta \mathbf{g} = \nabla W_p - \nabla U_p, \quad (11)$$

$$\nabla T_p = \delta \mathbf{g}, \quad (12)$$

em que

$$\delta g = -\frac{\partial T}{\partial h}. \quad (13)$$

Temos que para a equação de Bruns:

$$\zeta_p = \frac{T_p}{\gamma_Q}. \quad (14)$$

A fórmula de Stokes para o potencial anômalo, escrita como função das anomalias da gravidade e dependente, portanto do sistema de referência local, é (HOFMANN-WELLENHOF & MORITZ, 2005, pp. 104):

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma \quad (15)$$

onde a função  $S$  é definida por:

$$S(\psi) = \frac{1}{\text{sen}(\psi/2)} - 6\text{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right) + 1 - 5\cos\psi - 3\cos\psi \ln \left[ \text{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right) + \text{sen}^2\left(\frac{\psi}{2}\right) \right] \quad (16)$$

e  $\psi$  sendo o ângulo geocêntrico entre o ponto de cálculo e o ponto onde é avaliada a anomalia da gravidade, obtido em função das coordenadas de cada um destes pontos, respectivamente  $(\varphi, \lambda)$  e  $(\varphi', \lambda')$ , como (GEMAEL, 2002, pp. 146):

$$\psi = a \cos(\text{sen}\varphi \cdot \text{sen}\varphi' + \cos\varphi \cdot \cos\varphi' \cdot \cos\Delta\lambda) \quad (17)$$

A equação (15) é aplicada para a solução do Problema de Valor de Contorno da Geodésia (PVCG) para um SGR vinculado a um nível de referência local. Se a pretensão é resolver o PVCG independente do referencial local o distúrbio da gravidade apresenta-se como o caminho natural, na forma (HOFMANN-WELLENHOF & MORITZ, 2006, pp. 115):

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \delta g K(\psi) d\sigma \quad (18)$$

sendo

$$K(\psi) = \frac{1}{\text{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right)} - \ln \left[ 1 + \frac{1}{\text{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right)} \right]. \quad (19)$$

As anomalias da gravidade podem ser compatibilizadas com os distúrbios da gravidade se disponível um modelo adequado do geopotencial do qual possa ser extraído  $N$  ou  $T$  na forma (HOFMANN-WELLENHOF & MORITZ, 2005, pp. 95):

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial h} + \frac{\partial \gamma}{\partial h} N \quad (20)$$

ou

$$\delta g = \Delta g - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T. \quad (21)$$

O conjunto de equações (9), (18) e (21) mostra que é possível uma solução iterativa local para  $T$  ou para as anomalias da gravidade a partir dos distúrbios da gravidade, de forma independente do sistema de referência local (FREITAS *et al.* 2007). Esta abordagem está de acordo com a solução do PVCG proposta por Molodenskii. Para tanto, algumas considerações adicionais devem ser estabelecidas. Entre elas, a escolha de um sistema de altitudes compatível com o enfoque ora proposto. Nesse propósito coaduna-se o Sistema de Altitudes Normais de Molodenskii.

## REFERÊNCIAS

ARDALAN, A. A., GRAFAREND, E. W. **High-resolution regional geoid computation without applying Stokes's formula: a case study of the Iranian geoid.** Journal of Geodesy, n.78, p.138-156, 2004.

COLLIER, P.; CROFT, M. **Heights from GPS in an engineering environment,** Survey Review, n.264, p.76-86 e n.265, p.11-18, 1997.

DODSON, A., **GPS for height determination,** Survey Review, n.256, p.66-76, 1995.

DUQUENNE, H., Comparison and combination of a gravimetric quasigeoid with a levelled GPS data set by statistical analysis, **Phys. Chem. Earth (A)**, v.24, n.1, p.79-83, 1999. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/journal/14641895> Acesso em: 09 jan. 2004.

FEATHERSTONE, W. E.; DENTITH, M. C.; KIRBY, J. F., **Strategies for the accurate determination of orthometric heights from GPS,** Survey Review, v. 34, n. 267, 1998. Disponível em <http://espace.lis.curtin.edu.au/archive/00000029/01/strategies.pdf> . Acesso: 12 março 2004.

FREITAS, S. R. C. de, FERREIRA, V. G., PALMEIRO, A. S., DALAZOANA, R., LUZ, R. T., FAGGION, P. L. **Modelagem do Potencial Anômalo no Datum Vertical Brasileiro Visando Sua Nova Definição.** Boletim de Ciências Geodésicas. , 2008.

FOTOPOULOS, G. **An Analysis on the Optimal Combination of Geoid, Orthometric and Ellipsoidal Height Data.** 258 f. – Department of Geomatics Engineering, University of Calgary. 2003.

HEISKANEN, W. A.; MORITZ, H. **Physical Geodesy**. Reprint Institute of Physical Geodesy, Technical University, Austria, 1967.

HOFMANN-WELLENHOF, B., MORITZ, H. **Physical Geodesy**. Springer- Wien-New York. 403p. 2006.

KENYERES, A. Technology development for GPS-Heighting in Hungary. In: INTERNATIONAL SEMINAR ON GPS IN CENTRAL EUROPE, 5., Penc, 1999. Report on Geodesy, 5(46), 89 (1999).

PAN, M.; SJÖBERG, L. E. Unification of vertical datums by GPS and gravimetric geoid models with application to Fennoscandia, **Journal of Geodesy**, n.72, p.64-70, 1998.

SJÖBERG, L. E. **A new technique to determine geoid and orthometric heights from satellite positioning and geopotential numbers**. Journal of Geodesy, n.80, p.304-312, 2006.

ZILKOSKI, D. B. Establishing Vertical Control Using GPS satellite Surveys. PROCEEDING OF THE 19th INTERNATIONAL FEDERATION OF SURVEYING CONGRESS (FIG). Commission 9, p.281-294. 1990. Disponível em: [www.ngs.noaa.gov/PUBS\\_LIB/EstVert.pdf](http://www.ngs.noaa.gov/PUBS_LIB/EstVert.pdf). Acesso em: 12 jun. 2004.