
ANÁLISE DOS ELEMENTOS CALCULADOS PELA FERRAMENTA RÉGUA DO GOOGLE EARTH

SILVIO JACKS DOS ANJOS GARNÉS

TARCISIO FERREIRA SILVA

Universidade Federal de Pernambuco - UFPE
Centro de Tecnologia e Geociências - CTG
Departamento de Engenharia Cartográfica, Recife, PE
silvio.jacks,{tarcisiofs}@ufpe.br

RESUMO – Durante os últimos anos a tecnologia trouxe enorme facilidade na obtenção e manipulação de informações geográficas, principalmente com alguns aplicativos da Internet. Com isso, a Geodésia ganhou uma popularidade jamais vista pela humanidade desde os tempos que se tem registro. Entre os aplicativos da Internet para esse fim, está entre os mais utilizados nos dias de hoje no Brasil, o Google Earth. Tanto foi a popularidade dessa ferramenta que profissionais da área de levantamento estão adicionando informações dessas ferramentas ao planejamento de suas atividades. Obviamente que esta prática tem seus méritos e suas implicações, e por esse motivo, propõe-se neste trabalho a realização de uma análise em dois dos parâmetros de interesse usuários: à distância e o azimute fornecido pelo Google Earth. Escolheu-se para a análise, regiões com relevos acidentados a fim de evidenciar discrepâncias entre as prováveis medidas de distâncias. Os resultados mostraram que o uso da ferramenta régua do Google Earth não fornecem elementos geodésicos com rigor. Todavia o uso consciente em relação às discrepâncias com parâmetros rigorosos permitirá ao usuário da Topografia e da Geodésia, um ferramental de grande valia ao planejamento e produtividade dos seus trabalhos.

ABSTRACT - During the last years technology has brought tremendous ease of obtaining and manipulating geographic information, especially with some of Internet applications. With this the Geodesy won a popularity never before recorded by humanity. Among the applications of the Internet for this purpose, more commonly used today, at least in Brazil, is the Google Earth. So was the popularity of these tools that professionals of the surveying are adding information of this tools in the planning with the purpose of optimization his works. Obviously, this practice has its merits and therefore it is proposed in this paper the analysis performed in two of the parameters of interest to surveyors: the distance and azimuth provided by Google Earth. We chose to analyze regions with irregularities of ground in order to detect discrepancies between the measures distances. The results showed that using the tool ruler of the Google Earth, provide no geodetic elements rigorously. However if you have in mind the discrepancies, you could have powerful planning tool in your hands.

1 INTRODUÇÃO

A facilidade do uso das ferramentas de medidas do Google Earth (2010) tem feito com que muitos profissionais que trabalham com as geotecnologias utilizem essas ferramentas em suas atividades. É indiscutível a praticidade que tais ferramentas trouxeram para trabalhos na área. No entanto, levanta-se a questão sobre a qualidade dessas informações em termos geodésicos, ou mesmo topográficos, e o que seriam esses valores levantados na métrica de Gauss-Euclidiana. Obviamente que não se pretende investigar a habilidade de um usuário em acertar a posição de um ponto definidor de um elemento cartográfico na imagem do Google Earth, pois isso dependeria principalmente da resolução espacial da imagem, da qualidade do georreferenciamento das mesmas, da ortorretificação, do tratamento espectral durante o preparo da imagem para publicação no *software*, entre outras especificidades da ferramenta Google.

A demanda sobre a investigação proposta neste trabalho surgiu por consultas de profissionais da Topografia atuantes no interior de Pernambuco e de profissionais da Arquitetura, da Engenharia Civil e da Metrologia da região

nordeste do Brasil, além de ter servido de desafio como exercício para os alunos da disciplina de Geodésia dos Programas de Graduação e Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Cartográfica da UFPE.

Escolheu-se para a análise da ferramenta régua do Google Earth uma região com relevo acidentado a fim de evidenciar discrepâncias entre prováveis medidas de distâncias. As distâncias que foram investigadas na confrontação com as obtidas pela ferramenta régua do Google Earth foram: distância inclinada, distância acompanhando o terreno, distância no plano topocêntrico, distância no plano UTM, distância esférica e comprimento da linha geodésica no elipsoide. O azimute dado pela ferramenta régua do Google, também foi verificado em relação ao azimutes geodésico, de quadrícula e esférico.

2 COLETA DOS ELEMENTOS GEODÉSICOS DO GOOGLE EARTH PARA ANÁLISE

Para evidenciar as diferenças almejadas é preciso que o terreno tenha grandes variações de níveis. Com este pensamento escolheram-se três linhas de base para teste: a) uma no estado do Paraná partindo da cidade de Curitiba, mais precisamente do vértice PARA da RBMC no Centro Politécnico da UFPR, estendendo-se até o litoral paranaense na Ilha do Mel; b) outra no município de Macaparana-PE; c) e outra cruzando o Brasil de Leste-Oeste saindo de Recife - PE no vértice RECF da RBMC até a cidade de Porto Velho – RO, no vértice POVE da RBMC.

Duas são as formas de coletar as informações no Google Earth usando a ferramenta régua, a primeira delas e mais comum é obter as informações diretamente na tela, quando o *zoom* chega a um máximo e o deslocamento do mouse não detecta mais variação nas coordenadas, e a segunda consiste em gravar a *medida da linha*, depois salvar o arquivo na extensão *kml* e abri-lo com um editor de texto, por exemplo, usando o Word da Microsoft (2003).

2.1 Linha de base Curitiba – Ilha do Mel, Paraná

As figuras 1 e 2 ilustram as capturas do ponto inicial e final da linha de base Curitiba - Ilha do Mel, usando o Zoom para capturar as coordenadas. A figura 3 ilustra toda a linha de teste (Curitiba – Ilha do Mel) e os valores do comprimento e azimute fornecidos pela ferramenta régua do Google Earth.

Independente da opção de coordenadas em tela estarem em Geográficas ou UTM o valor da distância é uma só. No caso, 82.257,78m.



Figura 1- Captura em tela da posição inicial da linha do Google Earth para Curitiba - Ilha do Mel. 1.a) imagem da esquerda com mais zoom; 1. b) imagem da direita com menos zoom - mais sensível a deslocamento do mouse.



Figura 2- Captura em tela da posição final da linha do Google Earth para Curitiba - Ilha do Mel. 1.a) imagem da esquerda com mais zoom; 1. b) imagem da direita com menos zoom - mais sensível a deslocamento do mouse.

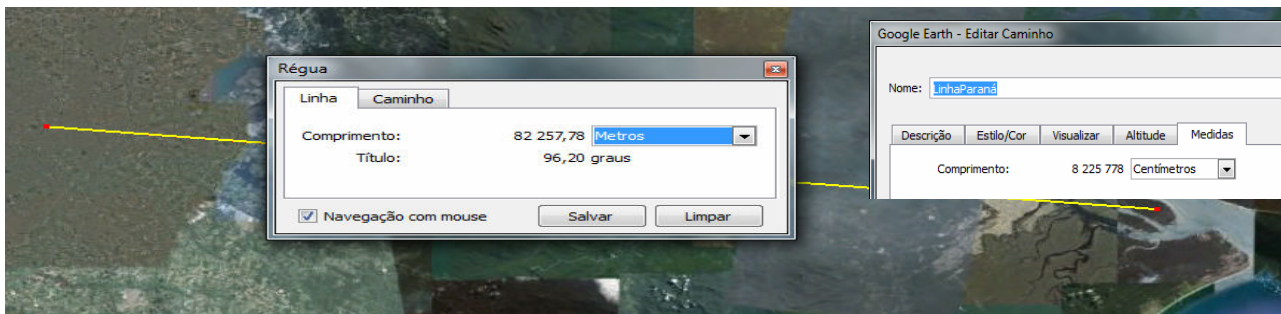


Figura 3 - Informações na propriedade da ferramenta régua do Google Earth. Comprimento da linha 82.257,78m; Azimute 96,20°.

Abrindo o arquivo salvo na extensão *kml* pode-se ter acesso aos valores da linha salva. O Trecho a seguir do arquivo *kml* corresponde ao exemplo anterior. As coordenadas que aparecem são longitude e latitude em graus decimais e a altitude do modelo digital de elevação que o Google Earth está usando (o tipo de modelo digital e a missão em que os dados foram obtidos não fará diferença nessa análise).

```

<!! tessellate ( 1 ) tessellate !!>
<!! coordinates >
-49.2309544527778,-25.4483551333333,923.8856852927165
-48.4173337388889,-25.5258826111111,-0.1491999765641162
</coordinates !!>

```

Para saber das discrepâncias entre a captura das informações via tela e via arquivo, gerou-se a tabela 1 a seguir. Nela verificou-se discrepância apenas na altitude do segundo ponto. Talvez seja um *bug* do mostrador do Google para altitudes quase nulas, já que na tela foi mostrado 14m e não -14cm.

Tabela 1 – Valores das coordenadas capturadas em tela e obtidas via arquivo *kml*.

Estação	Latitude	Longitude	Altitude	Fonte
Curitiba	25°26'54,08" S	49°13'51,44" W	923 m	Tela
Ilha Mel	25°31'33,18" S	48°25'02,40" W	14 m	
Curitiba	25°26'54,07848" S	49°13'51,43603" W	923,886 m	Arquivo
Ilha Mel	25°31'33,17740" S	48°25'02,40146" W	-0,1491 m	

2.2 Linha de base no município de Macaparana - PE

O Município de Macaparana possui um relevo bastante acidentado e pelo fato dos autores conhecerem a região, escolheram uma pequena linha de base de 822,21m a fim de verificar a hipótese da distância fornecida pela régua do Google Earth ser uma distância que acompanha o terreno. A figura 4 ilustra o trecho escolhido a noroeste da cidade de Macaparana.

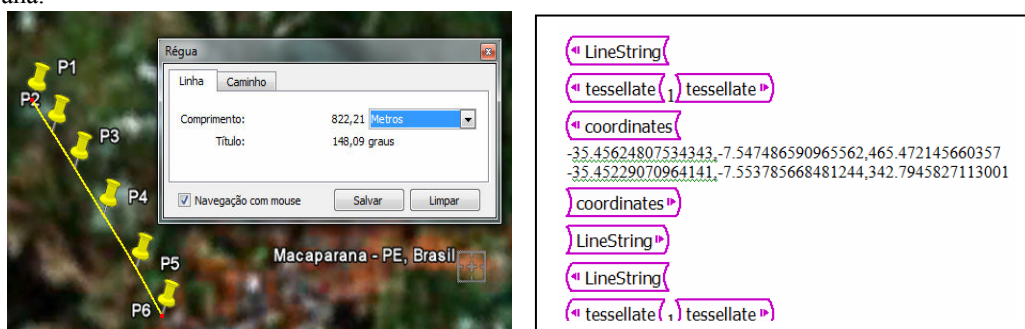


Figura 4 – Linha de base no município de Macaparana – PE

Com a ferramenta régua e o modelo digital de elevação disponibilizados no Google Earth mediu-se as distâncias a partir do ponto P₁ até cada um dos pontos P₂, P₃, P₄, P₅ e P₆ discretizados ao longo da linha de base. O perfil foi elaborado no software Excel (2003) da Microsoft e definida a linha de tendência por regressão usando um polinômio de 3º grau, conforme ilustra a figura 5.

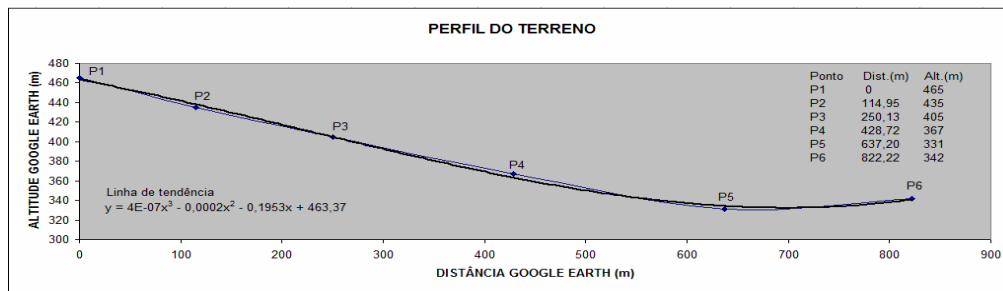


Figura 5 – Perfil do terreno na linha de base no município de Macaparana – PE e linha de tendência.

2.3 Linha de base de Recife-PE a Porto Velho-RO: Brasil de Leste a Oeste

A terceira experiência foi realizada para uma linha de base longa. Para isso utilizaram-se duas estações da RBMC; uma em Recife-PE, denominada de RECF e outra em Porto Velho _RO, denominada de POVE. Primeiro estabeleceu-se dois pontos com as coordenadas exatas dessas estações em SIRGAS2000 conforme monografia das estações IBGE (2011b): ftp://geoftp.ibge.gov.br/RBMC/relatorio/Descritivo_POVE.pdf; IBGE (2011c): ftp://geoftp.ibge.gov.br/RBMC/relatorio/Descritivo_RECF.pdf e em seguida mediu-se com a régua do Google Earth usando-se o máximo zoom no início e no final da linha obtendo-se uma distância de 3.188.019,29m. Depois de gerado o arquivo *kml* e corrigida as coordenadas dos extremos da linha para os valores fornecidos pelas monografias das estações, verificou-se novamente a propriedade da linha que apresentou uma diferença de 2 cm, resultando 3.188.019,31m. A figura 6 ilustra essa linha de base e os valores mencionados.

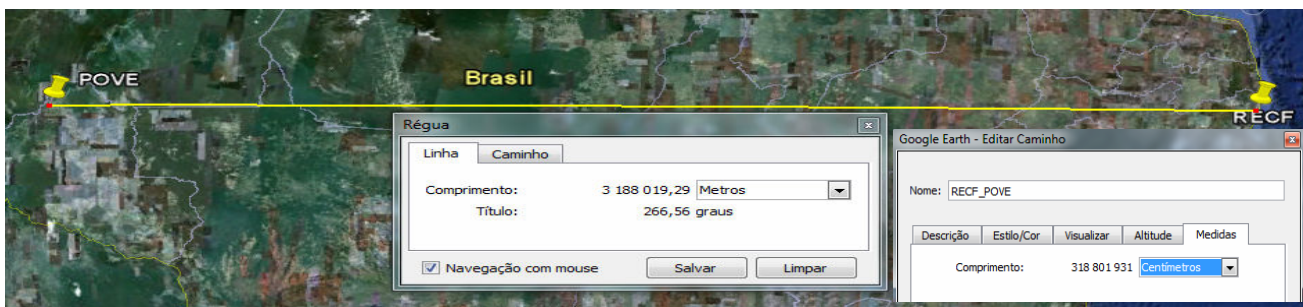


Figura 6 – Linha de base Recife – Porto Velho: Brasil de Leste a Oeste. Comprimento 3.188.019,31m

3 ELEMENTOS DA GEODÉSIA

Nesta seção foram apresentados os elementos da Geodésia necessárias a análises das linhas de base proposta na seção anterior. Como os arquivos *kml* do Google apresentam as coordenadas geodésicas: Longitude, Latitude no WGS-84 e altitude (questionando-se ser o último parâmetro mais próximo a altitude elipsoidal ou a altitude ortométrica!), o erro do modelo digital de elevação do Google Earth, pelo menos para o campus da UFPE, está com discrepância em torno de 5m relativa às altitudes ortométricas e em torno de 12m com respeito às geométricas. As altitudes ortométricas das RN's do IBGE 3641A, 3641B, e 3641C se encontram nas respectivas monografias das RN's, no site IBGE, (2011a): http://www.ibge.gov.br/home/geociencias/geodesia/bdgpesq_googlemaps.php#tabela_dados e as altitudes geométricas dessas RN's, em SIRGAS2000, levantadas por posicionamento GNSS, pelo autor, são respectivamente: 5,655m ; 3,491m; 3,795m. Essas minúcias em relação às altitudes entram nas correções apresentadas na seção 4.

3.1 Comprimento de um arco de curva

Na seção 2.2 foi apresentada a linha de tendência num modelo polinomial de 3º grau. Considerando que a distância entre os pontos trata-se de uma distância horizontal, pode-se calcular o comprimento exato do arco P_1P_6 (Fig. 5) dessa linha de tendência, usando a fórmula de comprimento de arco do cálculo diferencial e integral. A fórmula pode ser expressa como (PISKOUNOV,1990):

$$s = \int_{x_1}^{x_6} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx, \quad (1)$$

onde $f'(x)$ é a derivada da função em relação a x ; enquanto x_1 e x_n são as coordenadas no eixo X do ponto inicial e final do arco.

Por dificuldades em se obter uma função explícita para o cálculo de S na expressão (1) (no caso do polinômio de 3º grau) foi necessário recorrer à integração numérica. Nesse caso a integral deve ser substituída pelo somatório:

$$s = \lim_{\Delta x_i \leq \varepsilon} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi)]^2} \Delta x_i, \quad (2)$$

com ε suficientemente pequeno para manter a precisão de S dentro de um limite aceitável (para esse trabalho melhor que o mm); e, ξ deve estar no intervalo $x_{i-1} < \xi < x_i$ (usou-se o ponto médio desse intervalo).

3.2 Distância inclinada entre dois pontos

A partir do espaço bidimensional, incluindo o tridimensional e outros de ordem superior, onde são conhecidas as coordenadas de dois pontos, a álgebra vetorial permite o cálculo da distância $d_{P_1P_2}$, usando, entre outras, a norma euclidiana definida por (GILL *et. al.*, 1991):

$$d_{P_1P_2} = \|\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1\|_2 \quad (3)$$

onde: \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 representam vetores na equação (3).

Sendo, por exemplo, $\mathbf{P}_1(x_1, y_1, z_1)$ e $\mathbf{P}_2(x_2, y_2, z_2)$, a distância euclidiana entre \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 , irá fornecer a distância inclinada entre os dois pontos. A expressão (3) explicitada para esse caso ficaria:

$$d_i = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (4)$$

Para se ter as coordenadas cartesianas tridimensionais dos pontos coletados na seção 2 é preciso transformar as coordenadas curvilíneas elipsoidais: latitude (φ), longitude (λ) e altitude (h) em X, Y, Z cartesianas geocêntricas. Essas transformações podem ser realizadas pelas seguintes fórmulas (IBGE, 1989) :

$$\left. \begin{aligned} X &= (N + h) \cos \varphi \cos \lambda; & Y &= (N + h) \cos \varphi \sin \lambda; & Z &= [N(1 - e^2) + h] \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

onde: h é a altitude geométrica (ou elipsoidal) do ponto; e^2 é a primeira excentricidade do elipsoide ao quadrado; e N é o raio de curvatura da seção primeiro vertical. Os dois últimos são calculados respectivamente por:

$$\left. \begin{aligned} e^2 &= 2f - f^2, & N &= \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

com f designando o achatamento do elipsoide; e, a o semi-eixo maior do elipsoide.

3.3 Distância plana, azimute e rumo entre dois pontos no sistema topocêntrico

O sistema de coordenadas topocêntrico pode ser definido como um sistema que esta na superfície da Terra ou próximo a ela e tem relação com o centro da Terra ou com o centro do modelo geométrico que a representa. Atualmente podem-se distinguir três sistemas topocêntricos conforme seja a sua orientação. O Sistema Astronômico Local, o Sistema Geodésico Local e o Sistema Topográfico Local.

Para analisar as distâncias planas em virtude das coordenadas das geodésicas e pelo desconhecimento do desvio da vertical na situação local, o sistema adotado foi o Sistema Geodésico Cartesiano Local. As fórmulas são dadas pela equação (7) e a representação dos elementos envolvidos na figura (7) (GARNÉS, 1998):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \lambda_0 & \cos \lambda_0 & 0 \\ -\sin \varphi_0 \cos \lambda_0 & -\sin \varphi_0 \sin \lambda_0 & \cos \varphi_0 \\ \cos \varphi_0 \cos \lambda_0 & \cos \varphi_0 \sin \lambda_0 & \sin \varphi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

As coordenadas X, Y, Z cartesianas geocêntricas são calculadas pelas equações (5). A distância plana a partir da expressão (3) é calculada por:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (8)$$

O valor do rumo do ponto P_1 para o ponto P_2 é obtido por:

$$R = \arctg\left(\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}\right), \text{ e o quadrante por:} \quad (9)$$

R NE , se $\Delta x \geq 0$ e $\Delta y \geq 0$
 R SE , se $\Delta x \geq 0$ e $\Delta y < 0$
 R SW , se $\Delta x < 0$ e $\Delta y < 0$
 R NW , se $\Delta x < 0$ e $\Delta y \geq 0$

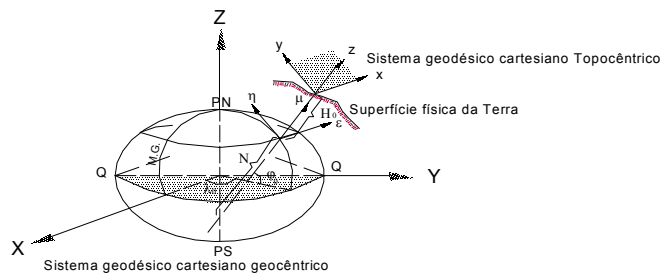


Figura 7 – Sistema geodésico cartesiano topocêntrico
Fonte: Garnés (1998)

O azimute (Az) é obtido a partir do rumo com a seguinte análise:

1. Se R NE , então $Az=R$;
2. Se R SE, então $Az=180-R$;
3. Se R SW, então $Az=180+R$;
4. Se R NW, então $Az=360-R$.

Obs.: Azimute do alinhamento é o ângulo a partir do norte, medido no sentido horário até o alinhamento. No sistema sexagesimal sua grandeza esta compreendida ao intervalo $0^\circ \leq Az < 360^\circ$.

3.4 Distância plana entre dois pontos na projeção cartográfica UTM

Dentre as projeções cartográficas que o Google Earth poderia eventualmente fornecer dados, a mais provável seria a Universal Transversa de Mercator (UTM), pois na opção de ferramentas do Google Earth, essa projeção é disponibilizada.

O assunto projeção UTM na literatura é bastante vasto, de maneira que pela limitação do número de páginas condicionadas a este trabalho, se reservaram mais detalhes sobre outras temáticas nesse artigo. Algumas referências bibliográficas poderiam ser consultadas principalmente em relação às fórmulas de transformação , como SANTOS (1985), SILVEIRA (1990), RICHARDUS (1972).

O rumo e o azimute de quadrícula depois de obtidas as coordenadas (E, N) são calculados com as mesmas considerações da equação (9) anterior.

3.5 Comprimento de arco de circunferência máxima em esferas auxiliares

Em muitos problemas práticos da Geodésia convém substituir o elipsóide de revolução por uma esfera com um conveniente raio de curvatura. Em particular serão investigados os arcos de circunferências máximos sobre duas esferas auxiliares. Uma esfera com raio médio de curvatura no ponto médio entre o início e final da linha de base; e uma esfera com raio igual ao raio de curvatura de uma seção de um azimute particular, calculado no primeiro ponto da linha de base.

As fórmulas dos raios de curvatura são (GEMAEL, 1977):

$$\text{O raio médio de curvatura: } R = \sqrt{NM}, \quad (10)$$

$$\text{Raio de curvatura da seção normal com azimute } Az: \quad \frac{1}{R} = \frac{\cos^2 Az}{M} + \frac{\sin^2 Az}{N}, \quad (11)$$

onde N é o raio de curvatura da seção primeiro vertical, equação (6); e, M é o raio de curvatura da seção meridiana, calculado por:

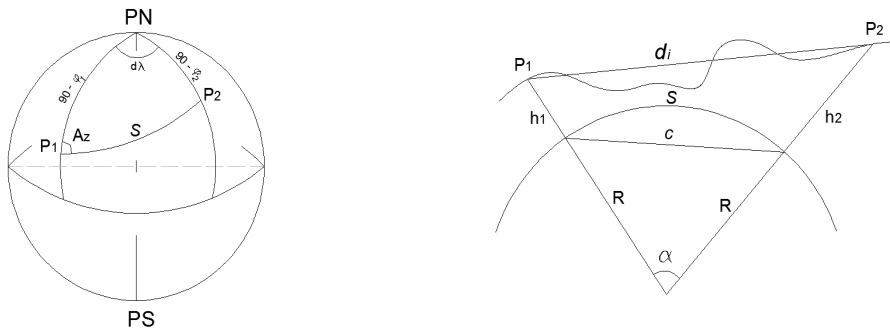
$$M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}. \quad (12)$$

O arco de circunferência máxima entre os pontos P_1 e P_2 pode ser obtido de duas maneiras; uma a partir da solução do triângulo esférico P_1PNP_2 (fig. 8a); e outra, fazendo a redução da distância inclinada à corda e depois ao arco (fig. 8b).

Usando a fórmula dos 4-elementos da trigonometria esférica (ver MUELLER, 1969), para o primeiro caso, resulta:

Dist. esférica em unidade angular: $\cos s = \text{sen}\varphi_1\text{sen}\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos d\lambda$ (13)

Dist. esférica em unidade linear: $S=R s_{rad}$ (14)



8a) triângulo esférico 8b) Redução geométrica de distâncias
 Figura 8 – Triângulo esférico e redução geométrica de distâncias

No mesmo triângulo P₁PNP₂, pela analogia dos senos da trigonometria esférica, o azimute esférico pode ser calculado por:

$$\text{sen } Az = \cos\varphi_2\text{sen } d\lambda / \text{sen } s \tag{15}$$

A segunda maneira, reduzindo a distância inclinada tridimensional, eq. (4), à corda, e depois ao arco de circunferência máxima.

As fórmulas para isso são (MARTIN, 1983), (LEICK, 1995):

$$c = \frac{\sqrt{d_i^2 - (h_2 - h_1)^2}}{\left(1 + \frac{h_1}{R}\right)\left(1 + \frac{h_2}{R}\right)} \quad ; \quad \alpha = 2 R \text{ arc sen}\left(\frac{c}{2R}\right) \quad \therefore \quad S = R \alpha \tag{17}$$

3.6 Comprimento da linha geodésica no elipsoide

A determinação da linha geodésica no elipsoide a partir das coordenadas latitude e longitude de dois pontos é conhecido como Problema Inverso da Geodésia. Existe uma gama de fórmulas para esse fim. Neste trabalho, no entanto, apenas duas das mais tradicionais foram utilizadas. As fórmulas de Gauss para latitude média e as fórmulas de Sodano e Robinson. As fórmulas de Gauss são muito precisa para curtas geodésicas, mas falham para longas geodésicas. As fórmulas de Sodano e Robinson são boas para longas geodésicas e também para pequenas geodésicas, as diferenças entre elas poderão ser apreciadas nos resultados apresentados.

3.6.1 Fórmulas de Gauss para latitude média (LEICK, 1995)

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}; \quad t = \text{tg}\varphi; \quad \eta^2 = \frac{e^2}{1-e^2} \cos^2\varphi; \quad V^2 = 1 + \eta^2 \tag{18}$$

$$[1] = \frac{1}{M}; \quad [2] = \frac{1}{N}; \quad [3] = \frac{1}{24}; \quad [4] = \frac{1 + \eta^2 - 9\eta^2 t^2}{24V^4}; \tag{19}$$

$$[5] = \frac{1 - 2\eta^2}{24}; \quad [6] = \frac{\eta^2(1 - t^2)}{8V^4}; \quad [7] = \frac{1 + \eta^2}{12}; \quad [8] = \frac{3 + 8\eta^2}{24V^4} \tag{20}$$

$$S \text{ sen } (Az) = \frac{1}{[2]} \Delta\lambda \cos \varphi [1 - [3](\Delta\lambda \text{sen } \varphi)^2 + [4]\Delta\varphi^2] \tag{21}$$

$$S \cos(Az) = \frac{1}{[1]} \Delta\varphi \cos \frac{\Delta\lambda}{2} [1 + [5](\Delta\lambda \cos \varphi)^2 + [6]\Delta\varphi^2]; \quad \Delta\gamma = \Delta\lambda \text{sen } \varphi [1 + [7](\Delta\lambda \cos \varphi)^2 + [8]\Delta\varphi^2] \tag{22}$$

$$S = \sqrt{(S \text{ sen } Az)^2 + (S \cos Az)^2}; \quad Az = \text{tg}^{-1}\left(\frac{S \text{ sen } Az}{S \cos Az}\right); \quad Az_1 = Az - \frac{\Delta\gamma}{2}; \quad Az_2 = Az + \frac{\Delta\gamma}{2} \pm 180^\circ \tag{23}$$

3.6.2 Fórmulas de Sodano e Robinson

As fórmulas de Sodano para a solução dos problemas direto e inverso da Geodésia foram apresentadas em 1957 na XI General Assembly of the International Association of Geodesy and Geophysics in Toronto. Neste trabalho, no entanto, usou-se as fórmulas mais elaboradas de Sodano e Robinson (1963). Pela experiência dos autores durante a elaboração das implementações computacionais, verificou-se que muitas fontes na literatura trazem as formulações com erros de transcrição, então fica como recomendação àqueles que tiverem dificuldades computacionais nas fórmulas descritas a seguir, consultar as referências Sodano e Robinson (1963) que podem ser baixadas da Internet, e também o livro de Raap (1993). Embora nesta última referência também existam alguns erros de transcrição nas fórmulas, ela é muito útil para elucidar o método.

Sejam a_0 : o semi-eixo maior do elipsoide; f : o achatamento do elipsoide; e $b_0=a_0(1-f)$ o semi-eixo menor do elipsoide. A geodésica(S) com seus respectivos azimute e contra-azimute são obtidas pela seqüência:

$$u_1 = tg^{-1}[(1-f)tg\varphi_1]; \quad u_2 = tg^{-1}[(1-f)tg\varphi_2]; \quad a=\text{sen } u_1 \text{ senu}_2; \quad b=\text{cosu}_1 \text{ cosu}_2 \quad \left. \vphantom{u_1} \right\} \quad (24)$$

$$d\lambda=\lambda_2-\lambda_1; \quad \text{cos}\varphi=a+b \text{ cosd}\lambda; \quad \text{sen}\varphi=[(\text{send}\lambda \text{cosu}_2)^2 + (\text{senu}_2 \text{cosu}_1 - \text{sen } u_1 \text{cosu}_2 \text{cosd}\lambda)^2]^{1/2} \quad \left. \vphantom{d\lambda} \right\} \quad (25)$$

Se $d\lambda > \pi$ fazer $\text{sen}\varphi = -\text{sen}\varphi$: inverter o sinal para grandes geodésicas

$$tg\varphi = \frac{\text{sen}\varphi}{\text{cos}\varphi}; \quad c = \frac{b \text{ send}\lambda}{\text{sen}\varphi}; \quad m=1-c^2; \quad \left. \vphantom{tg\varphi} \right\} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{S}{b_0} = & (1+f+f^2+f^3)\varphi + a[(f+f^2+f^3)\text{sen}\varphi + (-\frac{1}{2}f^2-f^3)\varphi^2 \text{cossec}\varphi + \frac{1}{2}f^3\varphi^3 \text{cossec}\varphi \text{cotg}\varphi] + m[(-\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}f^2 - \frac{1}{2}f^3)\varphi + \\ & (-\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}f^2 - \frac{1}{2}f^3)\text{sen}\varphi \text{cos}\varphi + (\frac{1}{2}f^2+f^3)\varphi^2 \text{cotg}\varphi - \frac{1}{6}f^3\varphi^3 - \frac{1}{2}f^3\varphi^3 \text{cotg}^2\varphi] + a^2[(-\frac{1}{2}f^2-f^3)\text{sen}\varphi \text{cos}\varphi + \frac{1}{2}f^3\varphi^3 \text{cossec}^2\varphi + \frac{1}{2}f^3\varphi^3 + \\ & m^2[(\frac{1}{16}f^2 + \frac{1}{8}f^3)\varphi + (\frac{1}{16}f^2 + \frac{1}{8}f^3)\text{sen}\varphi \text{cos}\varphi + (-\frac{1}{2}f^2 - \frac{7}{4}f^3)\varphi^2 \text{cotg}\varphi + (-\frac{1}{8}f^2 - \frac{1}{4}f^3)\text{sen}\varphi \text{cos}^3\varphi + \frac{1}{4}f^3\varphi \text{cos}^2\varphi + \frac{1}{3}f^3\varphi^3 + \\ & \frac{3}{2}f^3\varphi^3 \text{cotg}^2\varphi] + am[(\frac{1}{2}f^2 + \frac{7}{4}f^3)\varphi^2 \text{cossec}\varphi + (\frac{1}{2}f^2+f^3)\text{sen}\varphi \text{cos}^2\varphi - \frac{3}{4}f^3\varphi \text{cos}\varphi - 2f^3\varphi^3 \text{cossec}\varphi \text{cotg}\varphi] + a^2m[-\frac{1}{2}f^3\varphi - \\ & \frac{1}{2}f^3\text{sen}\varphi \text{cos}\varphi - \frac{1}{2}f^3\varphi^3 \text{cossec}^2\varphi + f^3\text{sen}^3\varphi \text{cos}\varphi] + am^2[-\frac{3}{4}f^3\varphi^2 \text{cossec}\varphi + \frac{1}{2}f^3\text{sen}\varphi \text{cos}^2\varphi + \frac{3}{4}f^3\varphi \text{cos}\varphi + \frac{3}{2}f^3\varphi^3 \text{cossec}\varphi \text{cotg}\varphi - \\ & \frac{1}{2}f^3\text{sen}\varphi + \frac{1}{2}f^3\text{sen}^5\varphi] + m^3[-\frac{1}{32}f^3\varphi + \frac{3}{4}f^3\varphi^2 \text{cotg}\varphi - \frac{1}{32}f^3\text{sen}\varphi \text{cos}\varphi + \frac{1}{16}f^3\text{sen}\varphi \text{cos}^3\varphi - \frac{1}{4}f^3\varphi \text{cos}^2\varphi - \frac{1}{6}f^3\varphi^3 - \\ & f^3\varphi^3 \text{cotg}^2\varphi + \frac{1}{12}f^3\text{sen}^3\varphi \text{cos}^3\varphi] + a^3[\frac{1}{2}f^3\text{sen}\varphi - \frac{2}{3}f^3\text{sen}^3\varphi]. \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\lambda - d\lambda}{c} = & (f+f^2+f^3)\varphi + a[(-\frac{1}{2}f^2-f^3)\text{sen}\varphi + (-f^2-4f^3)\varphi^2 \text{cossec}\varphi + \frac{3}{2}f^3\varphi^3 \text{cossec}\varphi \text{cotg}\varphi] + m[(-\frac{5}{4}f^2-3f^3)\varphi + \\ & (\frac{1}{4}f^2 + \frac{1}{2}f^3)\text{sen}\varphi \text{cos}\varphi + (f^2+4f^3)\varphi^2 \text{ctog}\varphi - \frac{1}{2}f^3\varphi^3 - \frac{3}{2}f^3\varphi^3 \text{cotg}^2\varphi] + m^2[\frac{31}{16}f^3\varphi - \frac{7}{16}f^3 \text{sen}\varphi \text{cos}\varphi + \frac{1}{2}f^3\varphi^3 - \frac{1}{8}f^3\text{sen}^3\varphi \text{cos}\varphi - \\ & \frac{9}{2}f^3\varphi^2 \text{cotg}\varphi + \frac{1}{2}f^3\varphi \text{cos}^2\varphi + \frac{5}{2}f^3\varphi^3 \text{cotg}^2\varphi] + am[\frac{9}{2}f^3\varphi^2 \text{cossec}\varphi - \frac{3}{2}f^3\varphi \text{cos}\varphi - \frac{7}{2}f^3\varphi^3 \text{cossec}\varphi \text{cotg}\varphi - \\ & \frac{1}{2}f^3\text{sen}\varphi \text{cos}^2\varphi + f^3\text{sen}\varphi] + a^2[f^3\varphi + \frac{1}{2}f^3\text{sen}\varphi \text{cos}\varphi + f^3\varphi^3 \text{cossec}^2\varphi]. \end{aligned} \quad (28)$$

$$\text{cotgAz}_{12} = \frac{\text{senu}_2 \text{cosu}_1 - \text{senu}_1 \text{cosu}_2 \text{cos}\lambda}{\text{cosu}_2 \text{sen}\lambda}; \quad \text{cotgAz}_{21} = \frac{\text{senu}_2 \text{cosu}_1 \text{cos}\lambda - \text{senu}_1 \text{cosu}_2}{\text{cosu}_1 \text{sen}\lambda} \quad \left. \vphantom{\text{cotgAz}_{12}} \right\} \quad (29)$$

4 RESULTADOS

Os resultados foram obtidos pela programação das fórmulas de grande parte dos métodos aqui apresentados em Delphi nos módulos do programa AstGeoTop (2011) desenvolvido pelo primeiro autor, e também em algumas rotinas complementares desenvolvidas em Matlab.

Tabela 1 - Linha de base 1: Google Earth Az=96,20° S=82.257,780m

Método/distância	Azimute	Distância	\Delta Az Google	\Delta S Google
Dist. inclinada:	*****	82.268,322	*****	10,542m
Topocêntrico:	96°10'05,2"	82.255,469	0°01'55"	2,311m
UTM:	96°55'47,6"	82.274,002	0°43'48"	16,222m
Esférica R _{MN} :	96°12'02,8"	82.037,737	0°00'03"	220,343m
Esférica R _{AZ} :	96°12'02,8"	82.257,324	0°00'03"	0,456m
Esf.reduz. Geom.	*****	82.257,749	*****	0,031m

Geodésica Gauss:	96°10'05,2"	82.257,749	0°01'55"	0,031m
Geodésica Sodano:	96°10'05,2"	82.257,749	0°01'55"	0,031m

Tabela 2 - Linha de base 2: Google Earth Az=148,09° S=822,21m

Método/distância	Azimute	Distância	\Delta Az Google	\Delta S Google
Dist. no terreno:	*****	834,838	*****	12,628m
Dist. inclinada:	*****	831,371	*****	9,161m
Topocêntrico:	147°54'56,5"	822,262	0°10'28"	0,052m
UTM:	147°35'33,9"	822,635	0°29'50"	0,425m
Esférica R _{MN} :	148°05'08,5"	823,409	0°00'16"	1,199m
Esférica R _{AZ} :	148°05'08,5"	822,221	0°00'16"	0,011m
Esf.reduz. Geom	*****	822,218	*****	0,008m
Geodésica Gauss:	147°54'56,6"	822,218	0°10'27"	0,008m
Geodésica Sodano:	147°54'56,6"	822,218	0°10'27"	0,008m

Obs.: para distância no terreno, com o passo da integração da fórmula (2) menor que 7m, o erro fica abaixo do milímetro.

Tabela 3 - Linha de base 2: Google Earth Az=266,56° S=3.188.019,310m

Método/distância	Azimute	Distância	\Delta Az Google	\Delta S Google
Dist. inclinada:	*****	3.154.974,859	*****	33044,451m
Topocêntrico:	266°33'56,8"	3.056.994,453	0°00'21"	131.024,857m
Esférica R _{MN} :	266°33'24,4"	3.177.594,531	0°00'12"	10.424,779m
Esférica R _{AZ} :	266°33'24,4"	3.187.936,964	0°00'12"	82,346m
Esf.reduz. Geom	*****	3.188.019,364	*****	0,054m
Geodésica Gauss:	266°33'58,7"	3.188.037,618	0°00'23"	18,308m
Geodésica Sodano:	266°33'54,4"	3.188.018,896	0°00'19"	0,414m

Com os resultados mostrados nas tabelas (1), (2) e (3), obtendo as coordenadas do Google Earth extraídas dos arquivos *kml* fica evidenciado pela proximidade, que a ferramenta régua fornece o elemento distância como sendo a distância reduzida ao arco da esfera de raio de curvatura da seção normal do azimute que liga ambos os pontos. A ordem de discrepância das distâncias do Google Earth foram mais próximas para pequenas linhas geodésicas: em torno de 1cm para 1000m; em torno de 3cm para 100km; em torno de 40cm para 3.200km. O resultado embora não rigoroso é muito bom, pois em termos do erro relativo, daria de 1/100.000; 1/2.741.925; e 1/7.970.047, respectivamente, que são precisões da mesma ordem ou superiores as exigidas pelos levantamentos geodésicos de primeira ordem das triangulações brasileiras no século passado.

O azimute, no entanto, está mais próximo do azimute obtido por uma esfera auxiliar, tanto para a esfera de raio médio de curvatura quanto para a esfera de raio de curvatura em função do azimute geodésico da seção normal. Por essa deficiência no azimute, e também pela quantidade de casas decimais fornecidas, seu uso seria recomendado apenas para trabalhos expeditos.

5 CONCLUSÃO

A análise realizada nesse trabalho mostrou que a ferramenta régua do Google Earth fornece distâncias medidas sobre uma esfera de raio de curvatura dado pela seção normal do azimute que liga os dois pontos usando a redução da distância inclinada, obtida com altitudes fornecidas pelo modelo digital de elevação em uso. As precisões são de ordem superior a 1/100.000.

O azimute fornecido é o azimute esférico e tem um caráter aproximado, sendo seu uso restrito às aplicações expeditas.

REFERÊNCIAS

IBGE. **R.PR 23/89**. Resolução nº 23, de 21 de fevereiro de 1989.

IBGE (2011a). Geociências. Geodésia. **Banco de dados**. Disponível em: < http://www.ibge.gov.br/home/geociencias/geodesia/bdgpesq_googlemaps.php#tabela_dados > , acesso em nov. 2011.

IBGE (2011b): Geociências. Geodésia. **Banco de dados**. Disponível em: <ftp://geoftp.ibge.gov.br/RBMC/relatorio/Descritivo_POVE.pdf> , acesso em nov. 2011.

IBGE (2011c): Geociências. Geodésia. **Banco de dados**. Disponível em: <ftp://geoftp.ibge.gov.br/RBMC/relatorio/Descritivo_RECF.pdf> , acesso em nov. 2011.

GARNÉS, S. J. A. Sistema de projeção e orientação das plantas topográficas. In.: **COBRAC 98** – Congresso Brasileiro de Cadastro Técnico Multifinalitário, UFSC: Florianópolis – 18 a 22 de Outubro de 1998.

GARNÉS, S. J. A. AstGeoTop. **Software**. Recife-PE: Departamento de Engenharia Cartográfica. Universidade Federal de Pernambuco. Compilação nov. 2011.

GEMAEL, C. **Introdução à Geodésia Geométrica: 1ª parte**. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Curitiba, 1977.

GILL, P. E ; MURRAY, W; WRIGHT, M. H. **Numerical linear algebra and optimization**. vol. I. California: Addison-Wesley Publishing Company, 1991.

GOOGLE EARTH. **Software**. Compilação 1 set. 2010. Renderizador DirectX9. Sistema Operacional – Microsoft Windows. Servidor kh.google.com.

LEICK, A. **GPS satellite surveying**. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1995.

MARTIN, F. A. **Geodesia y cartografía matemática**. Madrid: Editorial Paraninfo, 1983.

MICROSOFT OFFICE WORD 2003. **Software**. Parte do produto Microsoft Office Professional Edição 2003. Copyright 1983-2003. Microsoft Corporation.

MICROSOFT OFFICE EXCEL 2003. **Software**. Parte do produto Microsoft Office Professional Edição 2003. Copyright 1985-2003. Microsoft Corporation.

MUELLER, I. I. **Spherical and practical astronomy, as applied to geodesy**. New York, F. Ungar Pub. Co.,1969.

PISKOUNOV, N. **Cálculo diferencial e integral**. Vol. I. ed. 13. Porto: Livraria Lopes da Silva,1990.

RAPP, R. **Geometric geodesy: part II**. Columbus: Department of Geodetic Science and Surveying. Ohio State University, 1993.

RICHARDUS, P.; ADLER, R. K. **Map projections: for geodesists, Cartographers and Geographers**. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1972.

SANTOS, A. A. dos. **Representações cartográficas**. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, Ed. Universitária, 1985.

SILVEIRA, L. C. da. **Cálculos geodésicos no sistema UTM aplicados a topografia**. Editora e Livraria Luana Ltda, 1990.

SODANO, E. M.; ROBINSON, T. A. **Direct and inverse solutions of geodesics**. Washington: Army Map Service. Technical Report n.º7. Revised July, 1963.