

---

# DETERMINAÇÃO DOS COMPONENTES DO DESVIO DA VERTICAL PELO MÉTODO DE HELMERT: RELACIONAMENTO ENTRE NIVELAMENTO DE PRECISÃO COM ALTITUDE ELIPSOIDAL E MAPGEO2010

WENDSON DE OLIVEIRA SOUZA  
SILVIO JACKS DOS ANJOS GARNÉS

Universidade Federal de Pernambuco - UFPE  
Centro de Tecnologia e Geociências - CTG  
Departamento de Engenharia Cartográfica, Recife, PE  
Programa de Pós-graduação em Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação  
{wendsonsouza, sjgarnes}@gmail.com

---

**RESUMO** – Esta pesquisa evidencia a obtenção dos componentes do desvio da vertical para o ponto central do Laboratório de Astronomia no *campus* da UFPE, através do método de Helmert por meio do relacionamento entre nivelamento de precisão com altitude elipsoidal e MAPGEO2010. Assim como, verificação da influência da ondulação geoidal nas direções Norte-Sul e Leste-Oeste em tais componentes. Além do mais, ressalta-se a importância do conhecimento do desvio da vertical em aplicações relevantes em atividades de campo, principalmente nas transformações de coordenadas astronômicas em coordenadas geodésicas e compatibilização com levantamentos topográficos. Vale salientar que os valores encontrados no desenvolvimento desta pesquisa apontam para resultados preliminares promissores nos componentes do desvio da vertical, podendo a metodologia ser utilizada para outras áreas de estudo.

**ABSTRACT** - This research highlights the achievement of the components of the deviation from the vertical to the central point of the Laboratory of Astronomy on the *campus* of UFPE, by the method of Helmert through the relationship between the level of accuracy with ellipsoidal height and MAPGEO2010. Like, check the influence of geoid undulation in the in the directions North-South and East-West in such components. Moreover, it emphasizes the importance of the knowledge of deviation from vertical applications relevant field activities, especially in astronomical coordinate transformations in geodetic coordinates and compatibility with surveying. It is noteworthy that the values found in the development of this research points to promising preliminary results in the deviation of the vertical components, the methodology can be used for other areas of study.

---

## 1 INTRODUÇÃO

Nos Levantamentos Geodésicos as observações são efetuadas na superfície física da Terra. No entanto, em virtude das irregularidades da topografia terrestre são adotadas outras superfícies de referência para a avaliação de medições e realização de cálculos, ou seja, é empregado o modelo elipsoidal definido pelo elipsoide de revolução e o geoide estabelecido pela superfície equipotencial do campo de gravidade da Terra. Tais superfícies, geralmente, não são coincidentes e nem paralelas ocasionando uma separação entre si denominada por ondulação geoidal.

Contudo, os pontos estabelecidos na Terra podem ser referenciados a esses dois modelos de acordo com as linhas perpendiculares a sua superfície, isto é, a normal geodésica ao elipsoide e a vertical do lugar ao geoide. Por conseguinte, entende-se por desvio da vertical a inclinação do geoide em relação ao elipsoide, mais especificamente por um ângulo que a vertical no ponto na superfície terrestre forma com a normal do ponto correspondente do geoide.

Ressalta-se a importância do conhecimento do desvio da vertical em aplicações relevantes nos levantamentos de campo: *i)* transformação entre coordenadas astronômicas e geodésicas; *ii)* transformação de azimutes astronômicos ou azimutes determinados com giroteodolito em azimutes geodésicos; *iii)* redução de direções horizontais e ângulos medidos ao elipsoide; *iv)* redução dos ângulos zenitais medidos ao elipsoide; *v)* redução das distâncias inclinadas medidas eletronicamente ao elipsoide, através de ângulos zenitais; *vi)* determinação de diferenças de altura a partir de ângulos zenitais e distâncias inclinadas; *vii)* correção de desníveis por nivelamento geométrico, e entre outras.

Convém destacar que as constantes investigações sobre o desvio da vertical o tornam em um assunto bastante atual, podendo ser encontrado em diversas publicações de nível internacional, tais como, Featherstone e Rüeger (2000), Akkul (2007), Ceylan (2009) e entre outros. E também em publicações nacionais, como por exemplo, Zanetti (2006), Andrade (2008) e Ferreira (2008).

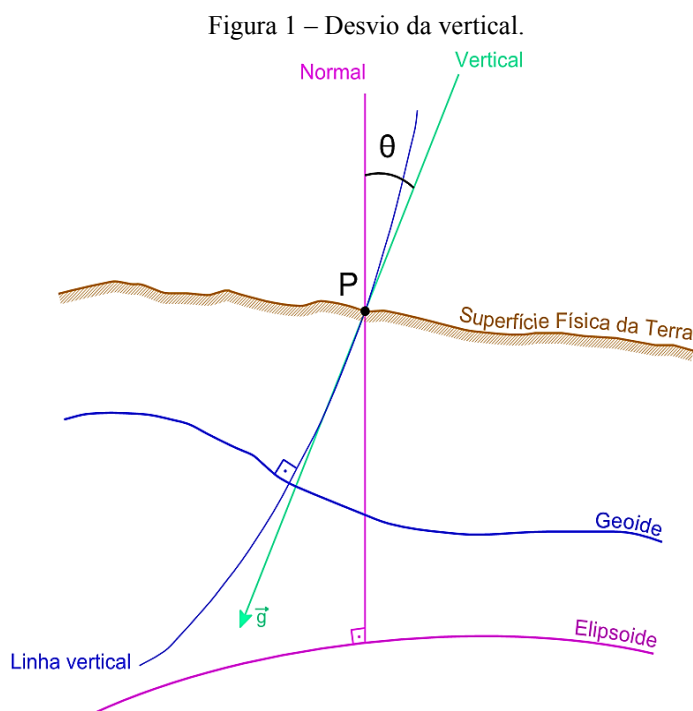
Portanto, com o advento do posicionamento por GNSS o desvio da vertical pode ser obtido através do cálculo da diferença entre o ângulo zenital astronômico e geodésico, ao invés de lidar com as diferenças de coordenadas astronômicas e geodésicas. Para tanto, é empregado nesta pesquisa o método de Helmert para estimar os componentes do desvio da vertical no pilar central do Laboratório de Astronomia da UFPE via relacionamento entre nivelamento de precisão com altitude elipsoidal e MAPGEO2010. Do qual, os valores encontrados apontam para resultados preliminares promissores dos componentes do desvio da vertical.

## 2 OBJETIVOS

O desenvolvimento desta pesquisa tem por objetivo: estabelecer os elementos e procedimentos necessários para determinar os componentes do desvio da vertical por meio do método de Helmert e analisar os resultados da ondulação geoidal na influência do desvio da vertical através do relacionamento entre nivelamento de precisão com altitude elipsoidal e MAPGEO2010.

## 3 DESVIO DA VERTICAL

De acordo com Gemael (2002) o desvio da vertical ou também conhecido por deflexão da vertical ( $\theta$ ) mede a inclinação do geóide em relação ao elipsoide de referência. Pode ser definido segundo a teoria de Molodenskii por um ângulo formado entre duas linhas imaginárias passantes no mesmo ponto P na superfície física da terra (SFT) denominadas por vertical ao geóide e normal perpendicular ao elipsoide, descrito na Figura 1.



Fonte: Zanetti *et al.* (2008).

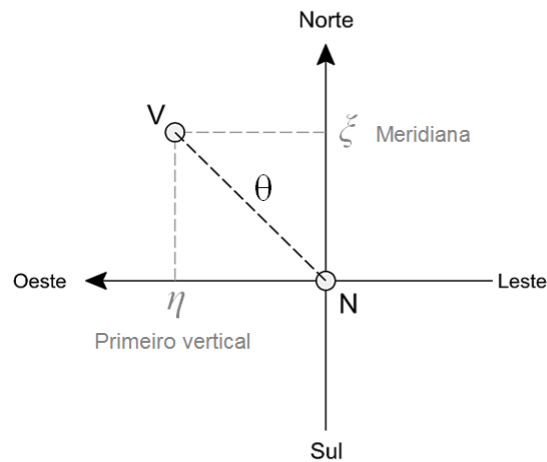
O cálculo do desvio da vertical é realizado por suas duas componentes ortogonais, uma na direção Norte-Sul do meridiano do lugar denominado componente meridiana ( $\xi$ ) e outra na direção Leste-Oeste no plano que contém o círculo primeiro vertical chamado componente primeiro vertical ( $\eta$ ).

Sendo assim, o desvio da vertical ( $\theta$ ) num ponto P na superfície terrestre fica determinado pela resultante de suas duas componentes ortogonais entre si por (GEMAEL, 2002):

$$\theta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \quad (1)$$

Onde, os valores dos componentes do desvio da vertical ( $\xi$ ,  $\eta$ ) são definidos positivos quando a vertical (V) se acha ao Norte e a Oeste da normal geodésica (N), conforme ilustrado na Figura 2.

Figura 2 – Sentido positivo dos componentes do desvio da vertical.



### 3.1 Método de Helmert

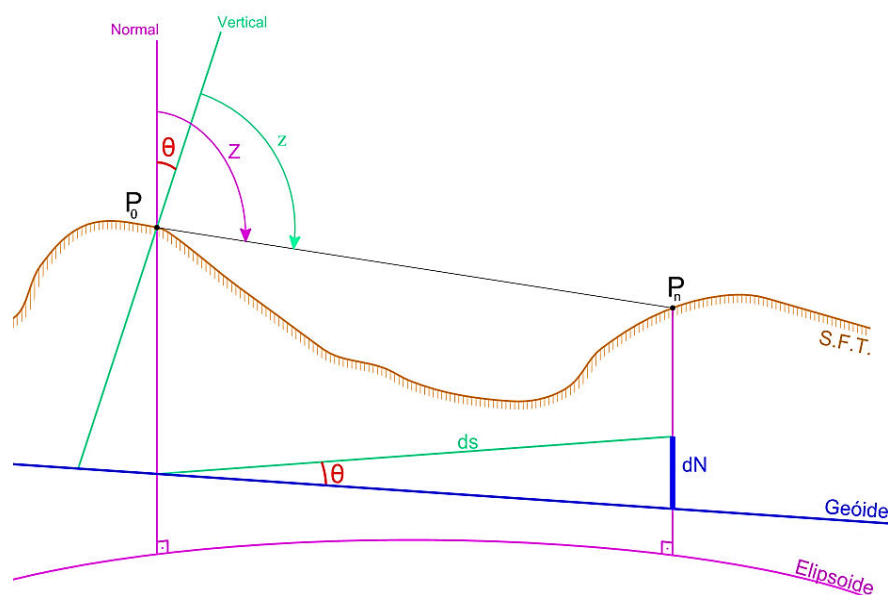
O desvio da vertical num ponto ( $P_0$ ) pode ser calculado a partir da diferença entre os ângulos zenitais geodésico ( $Z$ ) e astronômico ( $z$ ) na direção de outro ponto ( $P_n$ ), ambos na superfície terrestre expresso:

$$\theta = Z - z \quad (2)$$

Contudo, considerando dois pontos separados por uma distância ( $s$ ) finita, porém suficientemente pequena, em que se admita uma variação linear do componente do desvio da vertical num ponto  $P_0$ , este pode ser obtido como a razão diferencial entre a ondulação geoidal ( $N$ ) e a distancia ( $s$ ), projetado no plano que contém a normal geodésica e a vertical (HEISKANEN e MORITZ, 1967), Figura 3, definida:

$$\theta = Z - z = -\frac{dN}{ds} \quad (3)$$

Figura 3 – Determinação do desvio da vertical pelo método de Helmert.



Fonte: Adaptada de Heiskanen e Moritz (1967).

Logo, para uma seção de azimute geodésico ( $\alpha$ ) o desvio da vertical é calculado por (HEISKANEN e MORITZ, 1967).

$$\theta = -\frac{dN}{ds} = \xi \cdot \cos(\alpha) + \eta \cdot \sin(\alpha) \quad (4)$$

Onde:

dN: diferencial da ondulação geoidal para dois pontos  $P_0$  e  $P_n$ ;

ds: distância infinitesimal entre os pontos  $P_0$  e  $P_n$

Substituindo os diferenciais pelas diferenças na equação (4) tem-se:

$$-\frac{\Delta N_{P_0 P_n}}{\Delta s_{P_0 P_n}} \approx \xi \cdot \cos(\alpha_{P_0 P_n}) + \eta \cdot \sin(\alpha_{P_0 P_n}) \quad (5)$$

Em que:

$$\Delta N_{P_0 P_n} = N_{P_n} - N_{P_0} = (h_{P_n} - H_{P_n}) - (h_{P_0} - H_{P_0}) = (h_{P_n} - h_{P_0}) - (H_{P_0} - H_{P_n})$$

$\Delta s_{P_0 P_n}$ : distância entre os pontos  $P_0$  e  $P_n$

Desse modo, a equação para dN é independente do conhecimento da ondulação geoidal nos pontos. Bastaria conhecer o desnível entre os pontos obtidos por posicionamento GNSS e o desnível obtido por nivelamento geométrico.

Para  $i$  pontos irradiados a partir do ponto central ( $P_0$ ), com os azimutes geodésicos  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i$  conhecidos do problema inverso da Geodésia, a partir das coordenadas geodésicas ( $\phi, \lambda$ ) de cada ponto, e chamando  $a_i = \cos(\alpha_i)$ ,  $b_i = \sin(\alpha_i)$  e  $c_i = -dN/ds$ , e assim sucessivamente, o sistema de equações na forma matricial resulta em  $i$ -equações a duas incógnitas, Equação (6):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_i & b_i \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_i \end{bmatrix}}_b \quad (6)$$

Sendo  $X = [\xi \ \eta]^T$  a solução, podendo ser obtida pelo uso do método dos mínimos quadrados. Consequentemente, a partir do conhecimento da componente meridiana e da componente primeiro vertical, pode-se calcular o desvio da vertical por meio da Equação (1).

#### 4 MATERIAIS E MÉTODOS

A pesquisa contou com a utilização dos seguintes materiais:

01 par de receptores Topcon modelo Hiper Lite Plus L<sub>1</sub>/L<sub>2</sub>, com precisão nominal de  $\pm (3 \text{ mm} + 1 \text{ ppm})$  horizontal e  $\pm (5 \text{ mm} + 1,4 \text{ ppm})$  vertical;

01 nível digital Leica modelo DNA03, precisão com mira de invar 0,3 mm a 0,9 mm por 1 km de duplo nivelamento;

01 mira em invar de código de barra;

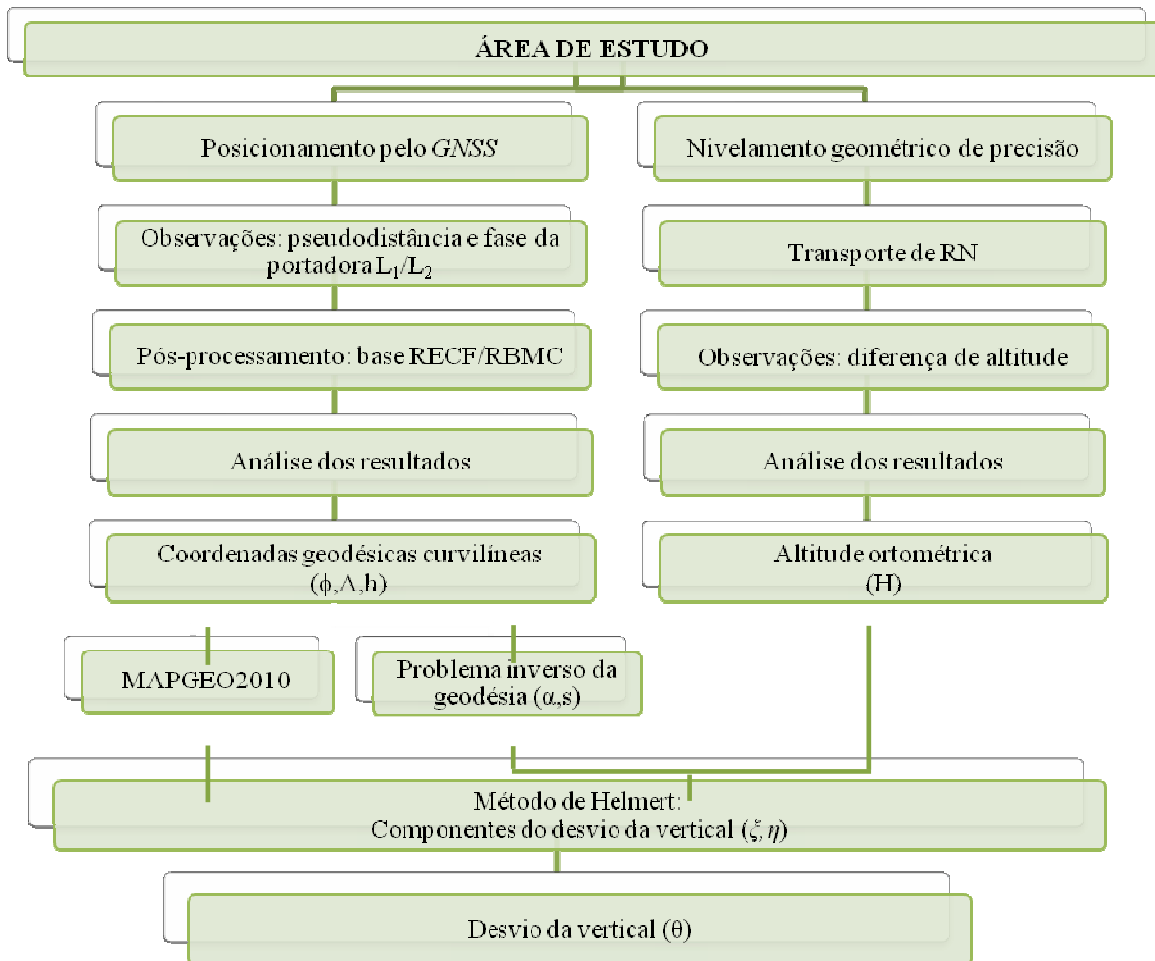
01 sapata para fixar a mira de invar;

02 bi-pés para instalação das antenas dos receptores; e

Recursos computacionais: *MAPGEO2010*, *Mathcad 15* e *Topcon Tools* versão 8.2.

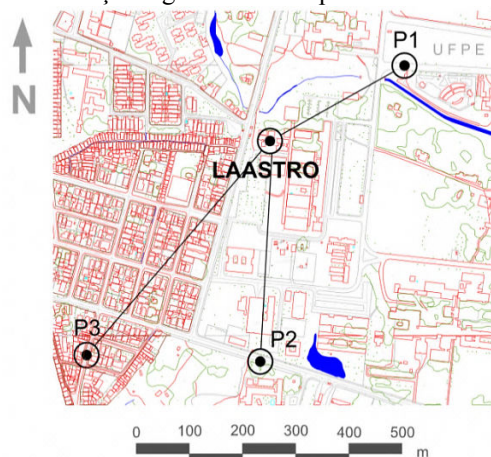
A metodologia empregada para o método de Helmert baseia-se no conhecimento das altitudes ortométricas e elipsoidais, distância e azimute geodésico dos pontos materializados no campus da UFPE e em seu entorno; conforme os procedimentos metodológicos ilustrados pelo fluxograma da Figura 4.

Figura 4 – Fluxograma dos procedimentos metodológicos envolvidos no método de Helmert.



Para a determinação dos componentes do desvio da vertical adotou-se como área de estudo a densificação de 3 pontos planialtimétricos situados pelo campus Joaquim Amazonas da Universidade Federal de Pernambuco e o seu entorno na cidade universitária, sediado no município de Recife-PE, conforme Figura 5.

Figura 5 – Localização e geometria dos pontos na área de estudo



FONTE: Planta topográfica da UNIBASE, Agência CONDEPE/FIDEM.

Convém ressaltar que tal área de estudo foi utilizada em função de sua proximidade ao Laboratório de Astronomia (LAASTRO), localizado na cobertura do prédio da administração do Centro de Tecnologia e Geociências (CTG), e de onde existe um pilar de concreto dotado de dispositivo de centragem forçada, onde serão estimados os valores dos componentes do desvio da vertical.

## 5 RESULTADOS

As coordenadas geodésicas curvilíneas foram obtidas no sistema geodésico de referência SIRGAS2000, através de pós-processamento das pseudodistâncias e fase da portadora  $L_1/L_2$  no software *topcon tools* versão 8.2; por posicionamento relativo a partir da estação base RECF/RBMC, cujas precisões horizontais e verticais foram melhores que 1 cm. Posteriormente, via formulário de Puissant do problema inverso da geodesia, determinou-se o azimute e distância geodésica dos pontos da área de estudo; tendo como ponto central o LAASTRO, conforme Tabela 1.

Tabela 1 – Problema inverso da geodesia.

Ponto central	Pontos	Azimute Geodésico	Distância Geodésica
	P <sub>1</sub>	53° 44' 10,064728''	222,78003 m
	P <sub>2</sub>	165° 40' 34,74401''	494,24522 m
	P <sub>3</sub>	211° 03' 34,44132''	588,80634 m

As altitudes ortométricas (H) obtidas pelo nivelamento geométrico de precisão foram relacionadas à Referência de Nível RN 3641-B, localizado nas proximidades da borda da ponte do riacho cavouco, dentro do campus da UFPE; cuja discrepância no nivelamento foi melhor que 1 mm. Em seguida, obteve-se a ondulação geoidal (N) via diferença da altitude elipsoidal (h) pela altitude ortométrica e por meio do MAPGEO2010 de todos os pontos, de acordo com a Tabela 2.

Tabela 2 – Obtenção da ondulação geoidal.

Pontos	Diferença	MAPGEO2010
	N = h - H	N
P <sub>1</sub>	-5,71600 m	-5,54 m
P <sub>2</sub>	-5,74147 m	-5,55 m
P <sub>3</sub>	-5,72298 m	-5,54 m
LAASTRO	-5,73100 m	-5,54 m

Conseqüentemente, a partir das informações levantadas em campo via posicionamento pelo GNSS/nivelamento geométrico de precisão e ondulação geoidal por meio do *software* MAPGEO2010, obteve-se os componentes do desvio da vertical para o ponto central do LAASTRO através da equação (6); tendo os resultados expressos na Tabela 3.

Tabela 3 – Desvio da vertical.

Componentes do desvio da vertical	Método de Helmert	
	Diferença	MAPGEO2010
$\xi$	2,592''	3,070''
$\eta$	7,065''	-3,120''
Desvio da vertical ( $\theta$ )	7,526''	4,427''

## 6 CONCLUSÕES

O desenvolvimento desta pesquisa aponta para resultados preliminares promissores dos componentes do desvio da vertical no pilar central do Laboratório de Astronomia da UFPE, através do método de Helmert no relacionamento entre nivelamento de precisão com altitude elipsoidal e MAPGEO2010.

Além do mais, a ondulação geoidal obtida via MAPGEO2010 apresentou valores muito próximos entre si, do qual pouco influenciou nos resultados dos componentes do desvio da vertical. Sendo necessários valores mais acurados para a ondulação geoidal. Como por exemplo, a ondulação geoidal obtida por meio da diferença entre altitudes ortométrica e geométrica de precisão.

Desse modo, novas pesquisas estão em andamento a fim de verificar os componentes do desvio da vertical para o ponto central do LAASTRO. Para tanto, está sendo empregada uma densificação maior de pontos. Assim como, outros métodos para determinação dos componentes do desvio da vertical.

## **AGRADECIMENTOS**

Os autores externam seus agradecimentos aos mestrandos Ana Itamara Paz, Alexandre do Nascimento Souza, Claudia Vergetti, a doutoranda Rejane Luna, ao acadêmico de engenharia cartográfica Vitor Pimentel e a professora Andrea de Seixas. Pessoas estas que estiveram envolvidas na coleta de dados, do qual faz parte este trabalho. Assim como a agência CONDEPE/FIDEM na concessão de material cartográfico da área de estudo, cidade universitária/UFPE.

## **REFERÊNCIAS**

ANDRADE, R. J. O. **Determinação do desvio da vertical empregando observáveis da topografia clássica e do posicionamento por satélites.** Viçosa-MG, Dissertação em engenharia civil, Universidade Federal de Viçosa, 109 p., 2008.

AKKUL, M. **Assessment of Deflection of The Vertical Components From GPS and Leveling Measurement,** Ms thesis, Selcuk University, Institute of the Natural and Applied Sciences, Konya. 2007

CEYLAN, A. **Determination of the deflection of vertical components via GPS and leveling measurement: A case study of a GPS test network in Konya, Turkey.** Scientific Research and Essay Vol.4 (12), pp. 1438-1444, December, 2009. ISSN 1992-2248.

FERREIRA, V. G.; PEREIRA, R. A. D.; CARVALHO, A. S.; DE FREITAS, S.R.C. Metodologia para a determinação das componentes do desvio da vertical. In. **II SIMGEO**, II Simpósio Brasileiro de Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação. Recife-PE, de 8 -11 de set. 2008. p. 1-7.

FEATHERSTONE, W.E.; RÜEGER, J. M. **The Importance of using deviations of the vertical for the reduction of survey data to a geocentric datum.** The Australian Surveyor, vol. 45, n.2, p. 46-61. dec 2000.

GEMAEL, C. **Introdução ao ajustamento de observações: aplicações geodésicas.** Curitiba: Editora da UFPR, 1994. 319p.

HEISKANEN W.A. MORITZ H, **Physical Geodesy.** São Francisco, EUA : W.H. Freeman and Company, 1967, 364 p.

ZANETTI, M. A. Z., DE FREITAS, S. R. C., FAGGION, P. L. **Determinação do Desvio da Vertical.** Revista Brasileira de Cartografia, no. 60/04, 2008.