

## DISCUSSÃO DO MÉTODO DE GRAFAREND PARA RESSEÇÃO ESPACIAL COM QUATRO PONTOS

AMANDA MARIA DA SILVA <sup>1</sup>

DANIEL CARNEIRO DA SILVA <sup>2</sup>

Universidade Federal de Pernambuco - UFPE  
Centro de Tecnologia e Geociências - CTG  
Departamento de Engenharia Cartográfica, Recife, PE  
amanda27mendy@gmail.com <sup>1</sup>, danielcs@ufpe.br <sup>2</sup>

**RESUMO** - A resseção espacial é uma das operações mais comuns em fotogrametria e topografia que visa obter a posição e orientação da câmera ou equipamento topográfico. Em fotogrametria é feita uma modelagem matemática a partir da equação da colinearidade que dá bons resultados para os casos comuns com fotografias aéreas quase verticais. Em topografia e geodésia o problema também é conhecido como interseção a ré no espaço e tem várias soluções analíticas a partir de leituras de ângulos ou distâncias. Entre as soluções analíticas existem métodos com iterações, que necessitam de valores iniciais aproximados e aplicam ajustamento pelo método dos mínimos quadrados, e métodos diretos, que usam quase sempre a lei dos cossenos em triângulos, cuja solução vem por meio de raízes de polinômio de grau três ou quatro. Como geralmente não é fácil obter valores iniciais os métodos diretos podem ser vantajosos e são muito discutidos na literatura, sendo Grafarend um dos mais citados. Este artigo tem por objetivo discutir um dos métodos de Grafarend para a resseção espacial de fotografias e analisar a escolha das raízes adequadas do polinômio e dos fatores de escala que entram na solução final. Para tanto foram feitas algumas simulações e implementações em ambiente MATLAB®. Os resultados são discutidos e são feitas sugestões para tornar o método de Grafarend mais fácil de usar.

**ABSTRACT** - The space resection is one of the most common operation in photogrammetry and topography, aiming to acquire the position and orientation of the camera or topographic equipment. In photogrammetry a mathematical modeling is made from the collinearity equation gives good results for common cases of almost vertical aerial photographs. In topography and geodesy the problem is known as three point resection and it has several analytical solutions from the readings of angles and distances. Among the analytical solutions there are methods with iterations that need approximate initial values and apply adjusting by the square minimum method, and direct methods, that almost always use the cosine law in triangles, with solutions in the form of the roots of polynomials of degree three or four. As it is not usually easy to obtain initial values, the direct methods can be advantageous and they are much discussed in literature, being Grafarend one of the most cited authors. This article aims to discuss one of the Grafarend methods for space resection of photographs and examine the choice of the appropriate polynomial roots and scale factors that go into the final solution. The chosen method was the use of some simulations and implementations in MATLAB® environment. The results are discussed and suggestions are made to make the Grafarend method easier to use.

### 1 INTRODUÇÃO

A resseção espacial em fotogrametria determina os parâmetros de orientação exterior de uma fotografia que são  $\omega$ ,  $\varphi$ ,  $\kappa$ ,  $X_c$ ,  $Y_c$  e  $Z_c$ , sendo que os três primeiros elementos correspondem à orientação (ou atitude) e  $X_c$ ,  $Y_c$  e  $Z_c$  são as coordenadas do centro perspectivo (CP ou a posição da fotografia no espaço). É calculada, a partir de fotocoordenadas  $(x_i, y_i)$  de pontos que tem as correspondentes coordenadas no espaço objeto  $(X_i, Y_i, Z_i)$  e da distância focal ( $f$ ). São necessários no mínimo três pontos não colineares para ser obtida uma solução.

Existem métodos de determinação iterativos e diretos. Para os primeiros é necessário conhecer os valores aproximados dos parâmetros a serem determinados  $(\omega_0, \varphi_0, \kappa_0, X_{c_0}, Y_{c_0}, Z_{c_0})$ . Entre os vários tipos de procedimentos para a determinação da resseção espacial com iteração o método mais usado é da equação da colinearidade. O

ajustamento é feito com o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) que pode ser pelo método paramétrico ou o método Combinado (LUGNANI, 1987).

Os métodos diretos para a recessão espacial tridimensional são mais comuns na topografia e geodésia e tem sido adaptados para a fotogrametria, como em Guan *et al* (2008). De modo geral se usa a lei dos cossenos para os triângulos e com base nessa lei são encontradas as distâncias do centro perspectivo aos pontos no espaço objeto. Depois os demais parâmetros de posição e orientação são obtidos com uma transformação isogonal 3D. Todas essas soluções acabam sempre numa equação de terceiro ou quarto grau.

A maioria das soluções diretas usa três pontos no espaço objeto como, por exemplo, em Haralick *et al* (1994) e Zeng (2012), mas Grafarend e Shan (1997) mostram uma solução com quatro pontos.

O método desenvolvido em Grafarend e Shan (1997) pode ser usado para imagem digital e estação total, fornece apenas a posição do CP sem os ângulos de rotação. Em passo inicial calcula as distâncias entre o centro perspectivo e os pontos no espaço objeto, que são um dos dados de entrada usados por Guan *et al* (2008) que obtém a resseção fotogramétrica completa.

Essa solução combinada de Guan *et al* (2008) foi usada por Silva (2014) que implementou em programa MATLAB calculando por Grafarend apenas as distâncias. Como enfrentou algumas dificuldades nos testes, principalmente com a escolha da raiz correta ficou evidente a necessidade de novos experimentos. Este artigo apresenta a solução completa de Grafarend e Shan (1997), distâncias e coordenadas do CP, para imagem digital e analisa as variações de posição das raízes e dos sinais das coordenadas baricêntricas de Möbius.

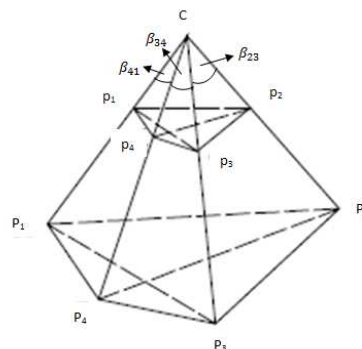
**2 METODOLOGIA**

Em Grafarend e Shan (1997) é apresentada e detalhada a teoria completa do método da resseção com quatro pontos, mas aqui serão mostradas apenas as equações efetivamente implementadas no programa desenvolvido em MATLAB.

Para início dos cálculos são utilizados como dados de entrada as coordenadas no espaço objeto, as fotocoordenadas (x<sub>i</sub>, y<sub>i</sub>) e distância focal. Os ângulos espaciais β<sub>ij</sub> são obtidos das fotocoordenadas e distância focal f.

$$\cos(\beta_{ij}) = \frac{x_i x_j + y_i y_j + f^2}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + f^2} \sqrt{x_j^2 + y_j^2 + f^2}} \tag{1}$$

Na Figura 1 C representa o CP, p<sub>i</sub> indicam as fotocoordenadas e P<sub>i</sub> são as coordenadas no espaço objeto e β<sub>ij</sub> são os ângulos espaciais, com i e j variando de 1 até 4.



**Figura 1-** Localização dos ângulos espaciais.

Fonte: Adaptado de Guan *et al* (2008).

Utilizando a lei dos cossenos nos triângulos mostrados na Figura 1 em função dos ângulos espaciais obtidos na fotografia são obtidas equações com as distâncias CP<sub>j</sub> que são as incógnitas:

$$\| \overrightarrow{P_1 P_2} \|^2 = \| \overrightarrow{C P_1} \|^2 + \| \overrightarrow{C P_2} \|^2 - 2 \| \overrightarrow{C P_1} \| \| \overrightarrow{C P_2} \| \cos(\beta_{12}) \tag{2 i}$$

$$\| \overrightarrow{P_2 P_3} \|^2 = \| \overrightarrow{C P_2} \|^2 + \| \overrightarrow{C P_3} \|^2 - 2 \| \overrightarrow{C P_2} \| \| \overrightarrow{C P_3} \| \cos(\beta_{23}) \tag{2 ii}$$

$$\| \overrightarrow{P_3 P_4} \|^2 = \| \overrightarrow{C P_3} \|^2 + \| \overrightarrow{C P_4} \|^2 - 2 \| \overrightarrow{C P_3} \| \| \overrightarrow{C P_4} \| \cos(\beta_{34}) \tag{2 iii}$$

$$\|\overrightarrow{P_4P_1}\|^2 = \|\overrightarrow{CP_4}\|^2 + \|\overrightarrow{CP_1}\|^2 - 2\|\overrightarrow{CP_4}\|\|\overrightarrow{CP_1}\|\cos(\beta_{41}) \tag{2 iv}$$

$$\|\overrightarrow{P_1P_3}\|^2 = \|\overrightarrow{CP_1}\|^2 + \|\overrightarrow{CP_3}\|^2 - 2\|\overrightarrow{CP_1}\|\|\overrightarrow{CP_3}\|\cos(\beta_{13}) \tag{2 v}$$

$$\|\overrightarrow{P_2P_4}\|^2 = \|\overrightarrow{CP_2}\|^2 + \|\overrightarrow{CP_4}\|^2 - 2\|\overrightarrow{CP_2}\|\|\overrightarrow{CP_4}\|\cos(\beta_{24}) \tag{2 vi}$$

Fazendo:

$$\|\overrightarrow{P_1P_2}\|^2 = b_{12}, \|\overrightarrow{P_2P_3}\|^2 = b_{23}, \|\overrightarrow{P_3P_4}\|^2 = b_{34}, \|\overrightarrow{P_4P_1}\|^2 = b_{41}, \|\overrightarrow{P_1P_3}\|^2 = b_{13}, \|\overrightarrow{P_2P_4}\|^2 = b_{24}, b_{ij} \in \mathbb{R}^+$$

$$-2 \cos(\beta_{12}) = a_{12}$$

$$-2 \cos(\beta_{23}) = a_{23}$$

$$-2 \cos(\beta_{34}) = a_{34}$$

$$-2 \cos(\beta_{41}) = a_{41}$$

$$-2 \cos(\beta_{13}) = a_{13}$$

$$-2 \cos(\beta_{24}) = a_{24}, -2 \leq a_{ij} \leq 2$$

em que:

CP É o centro perspectivo;

P<sub>i</sub> São os pontos no espaço objeto.

As distâncias procuradas são:

$$\|\overrightarrow{CP_1}\| = x_1$$

$$\|\overrightarrow{CP_2}\| = x_2$$

$$\|\overrightarrow{CP_3}\| = x_3$$

$$\|\overrightarrow{CP_4}\| = x_4, x_i \in \mathbb{R}^+$$

Com simplificações para os termos b<sub>ij</sub> chegam-se as equações de Grunert (GRAFAREND e SHAN, 1997):

$$x_1^2 + x_2^2 + a_{12}x_1x_2 = b_{12} \tag{3 i}$$

$$x_2^2 + x_3^2 + a_{23}x_2x_3 = b_{23} \tag{3 ii}$$

$$x_3^2 + x_4^2 + a_{34}x_3x_4 = b_{34} \tag{3 iii}$$

$$x_4^2 + x_1^2 + a_{41}x_4x_1 = b_{41} \tag{3 iv}$$

$$x_1^2 + x_3^2 + a_{13}x_1x_3 = b_{13} \tag{3 v}$$

$$x_2^2 + x_4^2 + a_{24}x_2x_4 = b_{24} \tag{3 vi}$$

Entre essas equações apenas três são independentes e escolhendo 3 ii, 3 iii e 3 vi são obtidas as relações para as coordenadas homogêneas y<sub>3</sub> e y<sub>4</sub>:

$$y_3 = \frac{x_3}{x_2} \tag{4}$$

$$y_4 = \frac{x_4}{x_2} \tag{5}$$

Isolando x<sub>2</sub><sup>2</sup> nas equações 3 ii, 3 iii e 3 vi, levando em consideração as equações 4 e 5 são obtidos:

$$x_2^2 = \frac{b_{23}}{1+y_3^2+a_{23}y_3} \tag{6 i}$$

$$x_2^2 = \frac{b_{34}}{y_3^2+y_4^2+a_{34}y_3y_4} \tag{6 ii}$$

$$x_2^2 = \frac{b_{24}}{1+y_4^2+a_{24}y_4} \tag{6 iii}$$

Dividindo 6 ii por 6 i e 6 iii por 6 i resultam as equações a seguir:

$$b_{34}(1 + y_3^2 + a_{23}y_3) = b_{23}(y_3^2 + y_4^2 + a_{34}y_3y_4) \tag{7}$$

$$b_{24}(1 + y_3^2 + a_{23}y_3) = b_{23}(1 + y_4^2 + a_{24}y_4) \tag{8}$$

Subtraindo a equação 7 pela equação 8 é obtido o valor de y<sub>4</sub>:

$$y_4 = \frac{(b_{34}-b_{23}-b_{24})y_3^2+a_{23}(b_{34}-b_{24})y_3+(b_{23}+b_{34}-b_{24})}{a_{34}b_{23}y_3-a_{24}b_{23}} \tag{9}$$

Substituindo este valor na equação 9 chega-se à equação do quarto grau em função de y<sub>3</sub>:

$$C_4y_3^4 + C_3y_3^3 + C_2y_3^2 + C_1y_3 + C_0 = 0 \tag{10}$$

em que:

$$C_4 = b_{23}(b_{34} - b_{23} - b_{24})^2 - a_{34}^2 b_{23}^2 b_{24}$$

$$C_3 = (b_{34} - b_{23} - b_{24}) \times [a_{24} a_{34} b_{23}^2 + 2a_{23} b_{23} (b_{34} - b_{24})] + a_{34} b_{23}^2 b_{24} (2a_{24} - a_{23} a_{34})$$

$$C_2 = b_{23} [a_{23}^2 (b_{34} - b_{24})^2 + 2(b_{34} - b_{23} - b_{24})(b_{23} + b_{34} - b_{24}) + a_{23} a_{24} a_{34} b_{23}^2 (b_{24} + b_{34}) + a_{34}^2 b_{23}^2 (b_{23} - b_{24}) + a_{24}^2 b_{23}^2 (b_{23} - b_{24})]$$

$$C_1 = 2a_{23} b_{23} (b_{34} - b_{24})(b_{23} + b_{34} - b_{24}) + a_{24} a_{34} b_{23}^2 (b_{34} + b_{24} - b_{23}) - a_{23} a_{24}^2 b_{23}^2 b_{34}$$

$$C_0 = b_{23} (b_{23} + b_{34} - b_{24})^2 - a_{24}^2 b_{23}^2 b_{34}$$

As raízes de (10) são obtidas facilmente pela função  $y=roots(p)$  do MATLAB<sup>®</sup>, sendo p os coeficientes de  $C_0$  a  $C_4$  e em y estão as raízes em ordem decrescente. Porém é necessário escolher a raiz ideal, e como Grafarend e Shan (1997) sugerem apenas que sejam testadas todas as raízes positivas a partir da maior, foram definidas nesta pesquisa algumas regras que auxiliaram nas aplicações práticas do método:

- Primeiro a solução deve ser um número real e positivo, uma vez que se busca o valor de uma distância (ZENG, 2012).
- A raiz deve se restringir no máximo à 1,5. Isto atende ao Teorema de Bolzano, que afirma que ao ser dada uma função contínua (neste caso o polinômio), num intervalo fechado, de modo que as imagens dos pontos extremos do intervalo tenham sinais diferentes, então existe pelo menos um número  $n$  tal que  $f(n) = 0$  (SARTORI e MANTOVANI, 2010). Foram realizados vários testes empíricos que mostraram que os valores que geravam resultados válidos eram a maior raiz no domínio  $[0; 1,5]$ . Se a raiz escolhida fosse maior que 1,5 as distâncias obtidas não dão resultados válidos.

Depois de escolhida a raiz ideal  $y_3$  são obtidas as distâncias que correspondem às variáveis x, começando por  $x_2$ :

$$x_2 = \sqrt{\frac{b_{23}}{1+y_3^2+a_{23}y_3}} \tag{11}$$

Inserindo-se esses valores obtém-se  $x_3$ :

$$x_3 = y_3 \times x_2 \tag{12}$$

Depois é calculado  $y_4$ , com a equação 9;

Com ele e  $x_2$  é obtido  $x_4$ :

$$x_4 = y_4 \times x_2 \tag{13}$$

Finalmente é obtido o valor de  $x_1$ :

$$x_1 = \frac{b_{13}-x_3^2-b_{12}+x_2^2}{a_{13}x_3-a_{12}x_2} \tag{14}$$

Após encontrar as distâncias o passo seguinte é calcular a resseção espacial direta. Neste artigo são calculados apenas os parâmetros da posição do CP, seguindo ainda Grafarend e Shan (1997), mas também é possível calcular os ângulos de Euler, como é feito em Guan *et al* (2008).

Para encontrar as coordenadas do centro perspectivo ( $X_c, Y_c, Z_c$ ) é usado o princípio de coordenadas baricêntricas de Möbius a partir da equação:

$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} \tag{15}$$

em que:  $X_i, Y_i, Z_i$ , com i variando de 1 a 4, são as coordenadas dos quatro pontos do espaço objeto. As coordenadas baricêntricas de Möbius  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  devem satisfazer a relação:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \tag{16}$$

e são calculadas por:

$$\lambda_1 = \frac{(234) \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4}{\Delta} \tag{17 i}$$

$$\lambda_2 = \frac{(341) \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_1}{\Delta} \tag{17 ii}$$

$$\lambda_3 = \frac{(412) \cdot x_4 \cdot x_1 \cdot x_2}{\Delta} \tag{17 iii}$$

$$\lambda_4 = \frac{(123) \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}{\Delta} \tag{17 iv}$$

em que:

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_1 - X_2 & Y_1 - Y_2 & Z_1 - Z_2 \\ X_1 - X_3 & Y_1 - Y_3 & Z_1 - Z_3 \\ X_1 - X_4 & Y_1 - Y_4 & Z_1 - Z_4 \end{vmatrix} \tag{18}$$

$$(234) = \pm \sqrt{1 + 2 \cos(\beta_{23}) \cos(\beta_{34}) \cos(\beta_{42}) - \cos^2(\beta_{23}) - \cos^2(\beta_{34}) - \cos^2(\beta_{42})} \tag{19}$$

$$(341) = \pm \sqrt{1 + 2 \cos(\beta_{34}) \cos(\beta_{41}) \cos(\beta_{13}) - \cos^2(\beta_{34}) - \cos^2(\beta_{41}) - \cos^2(\beta_{13})} \tag{20}$$

$$(412) = \pm \sqrt{1 + 2 \cos(\beta_{41}) \cos(\beta_{12}) \cos(\beta_{24}) - \cos^2(\beta_{41}) - \cos^2(\beta_{12}) - \cos^2(\beta_{24})} \tag{21}$$

$$(123) = \pm \sqrt{1 + 2 \cos(\beta_{12}) \cos(\beta_{23}) \cos(\beta_{31}) - \cos^2(\beta_{12}) - \cos^2(\beta_{23}) - \cos^2(\beta_{31})} \tag{22}$$

Os valores obtidos pelas equações 19 a 22 podem ter sinais positivos ou negativos e definem os sinais das coordenadas baricêntricas de Möbius. Nos exemplos calculados os sinais eram alternados na sequência +-+ ou -+-, mas deve ser colocado no programa um teste cuja combinação final resulte no valor 1 como exigido pela condição da equação 17.

As coordenadas do CP finalmente são obtidas com:

$$X_c = \lambda X_1 + \lambda X_2 + \lambda X_3 + \lambda X_4 \tag{23}$$

$$Y_c = \lambda Y_1 + \lambda Y_2 + \lambda Y_3 + \lambda Y_4 \tag{24}$$

$$Z_c = \lambda Z_1 + \lambda Z_2 + \lambda Z_3 + \lambda Z_4 \tag{25}$$

### 3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para o primeiro teste da implementação do cálculo da resseção espacial foram usados os dados existentes e conhecidos do artigo de Grafarend e Shan (1997): coordenadas do espaço objeto, distâncias entre o centro perspectivo e os pontos no espaço objeto, coordenadas do CP, valores do cosseno dos ângulos espaciais, os coeficientes auxiliares (234), (341), (412) e (123) e as coordenadas baricêntricas  $\lambda_i$ . Os pontos do espaço objeto, as coordenadas do CP e as distâncias estão na Tabela 1.

Tabela 1- Pontos do espaço objeto, CP e distâncias.

Ponto	X	Y	Z
1	0,0000	0,0000	1,0000
2	2,0000	0,0000	-1,0000
3	2,0000	2,0000	1,0000
4	0,0000	2,0000	-1,0000
CP	1,0000	1,0000	4,0000
<b>Distância CP ao ponto:</b>			
1	3,3166		
2	5,1962		
3	3,3166		
4	5,1962		

Fonte: Grafarend e Shan (1997).

Porém como no artigo citado não havia a distância focal nem as fotocoordenadas, foi estimada a distância focal em 50 mm, os ângulos de orientação todos iguais a zero, e simulada uma fotografia em MATLAB<sup>®</sup> cujas fotocoordenadas são apresentadas na Tabela 2.

Tabela 2- Fotocoordenadas obtidas com a simulação

Ponto	X	y
1	-16,6667	-16,6667
2	10,0000	-10,0000
3	16,6667	16,6667
4	-10,0000	10,0000

A partir dos dados de entrada foram calculados as distâncias entre os pontos do espaço objeto e o CP e os parâmetros de posição da resseção espacial (coordenadas do CP) usando as equações 1 a 25 e como os resultados coincidiram perfeitamente com os de Grafarend e Shan (1997) a implementação estava correta. A dificuldade maior foi descobrir qual a raiz ideal, conforme já comentado antes. As raízes obtidas foram todas reais (1,2676; 1,1025; 1,0505; 0,6383) sendo que a correta, encontrada por tentativas, foi a menor 0,6383.

Mais testes foram realizados com outros dados simulados, variando as alturas dos pontos objeto e do CP, com o objetivo de avaliar a robustez do método para geometrias mais desfavoráveis que a apresentada pelos dados originais do Grafarend e Shan (1997), cuja variação em Z e XY é igual a 2,0 e altitude do CP igual a 4,0. Com variações apenas de Z entre 0,9 à 0,3 (positivos e negativos) também os resultados deram certo com a quarta raiz. Quando houve modificação de z para 0,2 e 0,1 a solução mudou para a segunda raiz, a imediatamente menor que 1,5, por motivo também já comentado. Para  $z = \pm 0,2$  as raízes foram (1,5081; 0,9149; 0,8982; 0,8615) então a raiz correta foi 0,9149.

Com modificações da altura do CP de 4,0 para 8,0; 32,0; 64,0 e 128,0 os valores obtidos também coincidiram, mas os tipos das raízes e posição mudaram. Por exemplo, considerando Z do CP=128,0 as raízes foram as seguintes: (1,00004324780265 + 0,00887969510365127i; 1,00004324780265 - 0,00887969510365127i; 1,01525804560288; 0,984497797452399). este caso as duas primeiras raízes são complexas e duas reais, sendo a ideal a quarta.

Quanto à sequência dos sinais dos coeficientes dos termos das equações 19 a 22 em todos os exemplos acima ela foi + - + -.

Foram ainda usados outros dados, de Guan *et al* (2008), que são apresentados na Tabela 3. Para este teste os ângulos de orientação foram  $\omega = -0,0039$ ,  $\varphi = 0,0021$  e  $\kappa = 0,6756$ , com os quais foi simulada uma fotografia cujas fotocoordenadas estão na Tabela 4. Com esses dados de entrada os resultados encontram-se na Tabela 5.

Tabela 3- Pontos do espaço objeto, CP e distâncias (Guan *et al* (2008)).

Ponto	X	Y	Z
1	36589,4100	25273,3200	2195,1700
2	37631,0800	31324,5100	728,6900
3	40426,5400	30319,8100	757,3100
4	39100,9700	24934,9800	2386,5000
CP	39795,0800	27476,7500	7572,8100
<b>Distância CP ao ponto:</b>			
1	6637,1000		
2	8144,3000		
3	7411,7000		
4	5817,2000		

Tabela 4- Fotocoordenadas obtidas com a simulação

Ponto	x	y
1	-89,9998	-50,9365
2	-50,9423	100,5731
3	14,1952	76,3922
4	-20,6381	-62,6454

Tabela 5- Resultado do cálculo da distância entre pontos do espaço objeto e CP e dos parâmetros de posição da resseção espacial, pelo método de Grafarend, com dados de Guan *et al* (2008).

Ponto	Distância	Diferença entre distância calculada e de Grafarend e Shan (1997)
1	6637,0496	0,0504
2	8144,3318	0,0318
3	7411,6659	0,0341
4	5817,2408	0,0408
<b>Resultado dos parâmetros de posição da resseção espacial</b>		
$X_c(m)$	$Y_c(m)$	$Z_c(m)$
39793,8986	27475,9572	7572,7611
<b>Diferenças entre os parâmetros de posição da resseção espacial</b>		
$\Delta X_c(m)$	$\Delta Y_c(m)$	$\Delta Z_c(m)$
1,1814	0,7928	0,0489

Os resultados apresentados na Tabela 5 mostram que a diferença no cálculo da distância foi da ordem de 3 a 5cm, valores que podem ser considerados pequenos para distâncias superiores a 5800m. Mas para a posição do CP houve uma diferença de 1,1814 em Xc, na primeira casa decimal para Yc e na segunda casa decimal para Zc.

Neste caso as raízes foram (2,8852; 0,9100; 0,9054; 0,7269) e a solução só foi encontrada com a segunda raiz, 0,9100 a menor que 1,5 como comentado.

Quanto a sequência dos sinais dos coeficientes das equações 19 a 22 nesse último exemplo ela foi invertida em relação aos anteriores, isto é, - + - +.

Os motivos da variação maior entre os valores simulados e os obtidos com o método da resseção direta, neste exemplo com dados mais realistas de Guan *et al* (2008), em comparação com os demais exemplos, que sempre coincidiram, certamente é por conta da geometria dos pontos, em distâncias e posições relativas, mas esta questão necessita de mais experimentos.

#### 4 CONCLUSÕES

A implementação do método de resseção espacial de Grafarend mostrou-se viável como solução direta para a obtenção da posição do centro de projeção, sem necessidade de valores iniciais, e funcionou bem para os casos testados.

No entanto é necessário aperfeiçoar o algoritmo para que encontre a raiz correta entre as quatro resultantes do polinômio e também defina com segurança os sinais das coordenadas baricêntricas de Möbius.

#### REFERÊNCIAS

GRAFAREND, E.; SHAN, J. Closed-form solution of P4P or three-dimensional resection problem in terms of Möbius barycentric coordinates. **Journal of Geodesy**. Stuttgart: Springer. n. 71. p. 217-231, 1997.

GUAN, Y.; CHENG, X.; ZHAN, X.; ZHOU, S. Closed-form solution of space resection using unit quaternion. In: XX1st ISPRS CONGRESS: 3-11 JUL 2008 BEIJING, CHINA. **Proceedings: IAPRS**, Vol.XXXVII, ISSN 1682-1750, 2008, p. 43-48. Disponível em: [http://www.isprs.org/proceedings/XXXVII/congress/3b\\_pdf/09.pdf](http://www.isprs.org/proceedings/XXXVII/congress/3b_pdf/09.pdf). Acesso em dezembro de 2012.

HARALICK, R. M. ; LEE, C.-N.; OTTENBERG, K.; NOLIE, M. Review and Analysis of Solutions of three Point Perspective Pose Estimation Problem. **International Journal of Computer Vision**. [s.l.] . 13, n. 3, p. 331-356, 1994.

LUGNANI, J. B. **Introdução à fototriangulação**. Curitiba: Imprensa Universitária, 1987, 134 p.

SARTORI, C. S.; MANTOVANI, E. C. **Cálculo numérico**: com o programa cálculo e análise numérica. São Paulo: Página 10, 2010, 124 p. Disponível em: <http://www.pagina10.com.br/downloads/21.pdf>. Acesso em: Março de 2014.

SILVA, A. M. **A representação das matrizes de rotações com o uso de quatérnios: aplicações à fotogrametria**. 2014. 136 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação). Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Recife, 2014.

ZENG, H. New Non-iterative Solution of the Perspective 3-Point Problem. **Journal of Computational Information Systems**. Binary Information Press: Hong Kong, Vol. 8. N. 9. Pag. 3745-3755, 2012.