
A MATEMÁTICA DA VERTICALIZAÇÃO DE EDIFICAÇÕES PREDIAIS

ANA ITAMARA PAZ DE ARAÚJO¹

ANDRÉA DE SEIXAS²

^{1,2} Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

Centro de Tecnologia e Geociências - CTG

Departamento de Engenharia Cartográfica, Recife, PE

Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação

itamara.paz@ufpe.br, aseixas@ufpe.br

RESUMO - Este artigo tem o objetivo de apresentar os assuntos da área da Matemática que estão correlacionados com os conceitos da Geodésia, bem como evidenciar as grandes construções ao longo da História. Serão apresentados os conhecimentos básicos e avançados da Matemática, como também a definição matemática da verticalidade de uma edificação e respectivas soluções matemáticas empregadas nos métodos geodésicos/topográficos para a determinação da verticalidade.

ABSTRACT - This article to present the subject area of mathematics that are correlated with the concepts of Geodesy and highlights the great buildings throughout history. Basic and advanced knowledge of mathematics, the mathematical definition of the verticality of a building and its mathematical solutions employed in geodetic / surveying methods to determine the verticality will be presented.

1 INTRODUÇÃO

O acompanhamento e o controle geométrico periódicos da verticalização de um edifício predial nos canteiros de obra da Construção Civil são de grande importância, pois é necessário que se tenha um controle de qualidade da execução da edificação predial. Esse tipo de procedimento de campo é tratado na Engenharia Civil como controle dimensional e controle de qualidade da edificação.

O controle geométrico refere-se à geometria projetada nas lajes, vigas ou pilares, a execução dos elementos constituintes do edifício na geometria projetada, e na medição e cálculos dos desvios entre a geometria projetada e aquela que foi executada (BOTELHO, 2003).

No contexto da construção de edifícios, o controle dimensional está relacionado com a definição da geometria projetada nas edificações prediais, mas deve-se ir além, podendo ser entendido como o conjunto de atividades que visam assegurar, em um primeiro instante, a locação do edifício no “*building site*”, a execução dos elementos constituintes do edifício na geometria projetada, e em uma etapa seguinte medir os desvios entre a geometria projetada de cada elemento e a realmente executada (BARROS, 2001).

Os progressos na área de micro medições, a partir da instrumentação geodésica, perceptível através do instrumental de medição de ângulos e distâncias, e medição de desníveis, fortalecem e incentivam o estudo e a aplicabilidade de métodos geodésicos para a verticalização de edifícios em ambientes urbanos. Existem vários instrumentos no campo da Geodésia que proporcionam as medições de direções, ângulos e distâncias, como, por exemplo, o teodolito, o nível de luneta e a estação total, que consistem em instrumentos ópticos de medição utilizados em levantamentos Geodésicos e Topográficos, os quais serão utilizados neste trabalho.

O controle dimensional proporciona a qualidade na construção de uma edificação predial. No contexto deste trabalho será contemplada a temática de verticalização ressaltando sua verificação a partir de métodos geodésicos de medição.

Os métodos aplicados neste trabalho são denominados de Métodos Terrestres de Medição realizados com o emprego de Estação Total e Nível Digital. Basicamente foram realizadas medições angulares: horizontais e verticais e medições lineares inclinadas com o emprego de uma Estação Total. Também foram realizadas medições lineares verticais e horizontais com o emprego de um Nível Digital.

Neste contexto, faz-se necessário o conhecimento e a aplicação de conceitos matemáticos relacionados aos métodos topográficos/geodésicos empregados. Este trabalho contempla a aplicação de métodos topográficos/geodésicos de determinação de coordenadas, tais como: poligonização fechada, interseção a vante, interseção a ré e nivelamento trigonométrico de visadas unilaterais a curtas distâncias, levantamento planialtimétrico a partir de três distâncias e três pontos conhecidos.

Uma das primeiras construções que se destacou pelo seu comprimento vertical foi a Pirâmide de Quéops (Pirâmide do Egito). Esta pirâmide sobressaiu como uma das criações mais espetaculares e geniais da História da Arquitetura. A Civilização Egípcia se destacou das demais civilizações por ter domínio de uma Matemática considerada na época avançada (BOYER, 1996). Este monumento marca o auge da época de tais construções, tanto no que se refere ao tamanho quanto à complexidade da estrutura. Tendo uma superfície que cobre quase $53.000 m^2$, é sem dúvida um dos monumentos mais polêmicos de toda a antiguidade.

Outro destaque das construções de grande porte vertical é o edifício Burj Khalifa Bin Zayid (Dubai). Este construído na cidade de Dubai é o maior e espetacular edifício de grande porte vertical. O Burj Khalifa Bin Zayid, conhecido anteriormente como Burj Dubai, é a maior estrutura e consequentemente o maior arranha-céu já construído pelo Homem, com mais de 828 metros de altura. Sua construção iniciou-se do dia 21 de setembro do ano de 2004 e foi inaugurado no dia 4 de janeiro do ano de 2010.

Para a construção de tais edificações necessita-se de conhecimentos da área da Construção Civil, Geodésia e Matemática, portanto será apresentado neste trabalho os conceitos de alguns assuntos de tais áreas, como por exemplo, equações diferenciais e o processo de linearização, sistemas de coordenadas retilíneas e curvilíneas, transformação de similaridade entre coordenadas e a definição matemática da verticalidade de uma edificação.

2 EMBASAMENTO TEÓRICO

Este item tem como objetivo descrever a fundamentação matemática necessária para a realização dos métodos geodésicos/topográficos aplicados neste trabalho para a definição de pontos de referência e pontos-objeto para o estudo da verticalização de um pilar de uma edificação predial com 31 pavimentos em construção (ARAÚJO, 2013).

Neste contexto, faz-se necessário o conhecimento e a aplicação de equações diferenciais, desenvolvimento de série de Taylor, sistemas de coordenadas, transformação e rotação de sistemas de coordenadas cartesianas e métodos planialtimétricos de determinação de pontos de referência e pontos-objeto.

2.1 Equações diferenciais e o processo de linearização

O conceito de derivada e desenvolvimento em série de Taylor são utilizados quando as formulações matemáticas das medições denominadas indiretas não representam equações lineares. Para isso é importante o desenvolvimento em série de Taylor para a linearização destas equações, o que requer o emprego de derivadas de funções.

Segundo Gemael (1994), as observações podem ser: diretas, indiretas e diretas condicionadas. A primeira é processada diretamente sobre a grandeza procurada, por exemplo, a medida angular entre dois lados consecutivos de uma poligonal. Na segunda medem-se diretamente uma grandeza que se relaciona, através de um modelo matemático, com as incógnitas de interesse, por exemplo, a determinação da latitude de um ponto. Por último a observação direta condicionada representa uma observação superabundante condicionada a observações diretas, onde todas as observações são funcionalmente dependentes, por exemplo, a medição de dois ângulos de um triângulo geodésico com um teodolito são observações diretas, mas a observação do terceiro ângulo introduz uma condição geométrica através de uma observação superabundante.

As equações diferenciais, exemplo Equação 1, são equações que apresentam derivadas ou diferenciais de uma função desconhecida, ou seja, a incógnita da equação.

$$y' = 2x \quad (1)$$

A Equação Diferencial Ordinária envolve derivadas de uma função de uma só variável independente e Equação Diferencial Parcial, envolve derivadas parciais de uma função de mais de uma variável independente (www.somatematica.com.br, acessado em 29/11/2012), exemplo Equação 2 e 3.

$$\frac{dy}{dx} = x + 5 \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 + y^2 \quad (3)$$

A Equação (2) apresenta um exemplo com apenas uma variável independente e a Equação (3) apresenta um exemplo com derivadas parciais.

A derivada fornece a inclinação de uma curva em um ponto. Considera-se uma curva e um ponto P sobre ela. Onde se pretende definir as noções de inclinação da curva e de reta tangente à curva neste ponto P . A Figura 1 ilustra essa situação.

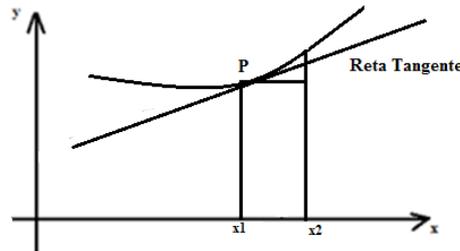


Figura 1 – Inclinação da curva e de reta tangente à curva neste ponto P.

2.2 Sistemas de coordenadas retilíneas e curvilíneas

Um Sistema de Coordenada é utilizado para especificar uma ênupla de escalares a cada ponto num espaço n-dimensional. O espaço no qual é sobreposto o sistema de coordenadas não necessariamente precisa ter definida uma métrica, tal como no caso do espaço riemmaniano no contexto da relatividade (DO CARMO, 2005). Os "escalares" em muitos casos são números reais, mas, dependendo do contexto, também podem ser números complexos ou membros de outro corpo qualquer. De forma mais geral, as coordenadas podem por vezes ser retiradas de anéis ou outras estruturas algébricas semelhantes (DO CARMO, 2005).

As coordenadas lineares podem ser coordenadas cartesianas no plano, ou coordenadas cartesianas no espaço (3D). Considere a coordenada cartesiana no plano como dois eixos x e y perpendiculares em um ponto qualquer O, no qual se determina o plano β. Sendo que o ponto P qualquer, $P \in \beta$, conduzidos por ele duas retas. A Figura 2(a) apresenta a representação de um plano cartesiano qualquer. As coordenadas cartesianas no espaço (3D) consistem na determinação do ponto P(x, y e z), ou seja, acrescenta-se nos eixos (x, y) perpendiculares entre si o eixo z. A Figura 2(b) ilustra a situação do ponto P(x,y e z).

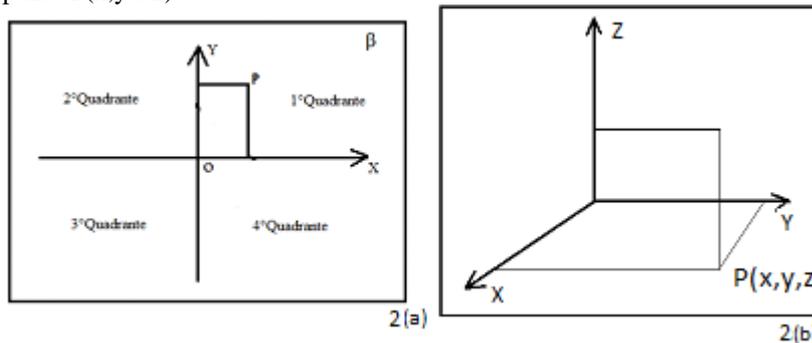


Figura 2 – Plano cartesiano qualquer (a) e plano cartesiano representando um ponto P (x, y e z)(b).

2.3 Transformação de similaridade entre coordenadas

No método de transformação por similaridade entre coordenadas uns dos conhecimentos matemáticos exigidos é a álgebra linear, pois para o cálculo das coordenadas do ponto, precisa necessariamente fazer uma matriz de rotação ortogonal, assunto este detalhado em álgebra linear, denominado de rotação de sistema.

A definição de rotação de sistema é seja P (x, y) um ponto referido a um sistema cartesiano ortogonal xOy. Se XOY é um sistema ortogonal com a mesma origem que xOy e o ângulo entre os eixos x e X é α, dize-se que XOY foi obtido por uma rotação de xOy. A Figura 3 apresenta a rotação entre sistemas em um triângulo não retângulo, ou seja, não possui um ângulo de 90° graus.

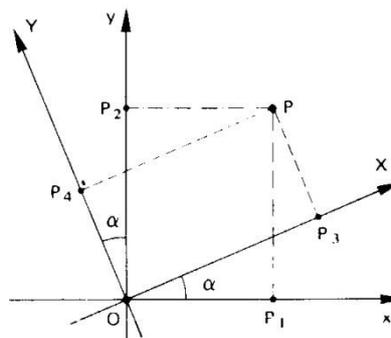


Figura 3 – Triângulo não retângulo.FONTE: IEZZI.Gelson, 1977.

No primeiro caso, projetando-se os três segmentos de Ox, tem-se:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_3} + \overrightarrow{P_3P} \quad (4)$$

Obtém-se que:

$$X = X \cdot \cos(a) - Y \cdot \sin(a) \quad (5)$$

No segundo caso, projetando-se os três segmentos de Oy, tem-se:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_4} + \overrightarrow{P_4P} \quad (6)$$

Obtém-se que:

$$Y = X \cdot \sin(a) + Y \cdot \cos(a) \quad (7)$$

Com isso, faz-se a rotação entre sistemas e utiliza-se a mesma metodologia para a rotação entre matrizes ortogonais.

2.4 Definição matemática da verticalidade de uma edificação

Na NBR (14.166/1998), fica determinado que um plano de representação é constituído de sistemas fundamentais para o posicionamento dos pontos do levantamento por intermédio de um sistema cartesiano ortogonal em duas dimensões, onde:

- Os eixos X e Y estão jacentes no Plano Horizonte Local (plano tangente ao elipsóide de referência), adotando-se, deste instante em diante, para efeito de cálculos, a esfera de adaptação de Gauss como figura geométrica da Terra (superfície de referência);
- O eixo Y coincide com a linha meridiana (nortesul) geográfica, no ponto de tangência, orientado positivamente, para o norte geográfico;
- O eixo X é orientado, positivamente, para o leste.

Observa-se que o Plano Horizonte Local é elevado à altitude ortométrica H , média da área de abrangência do sistema, passando a se chamar Plano Topográfico Local, conforme a Figura 4 apresenta.

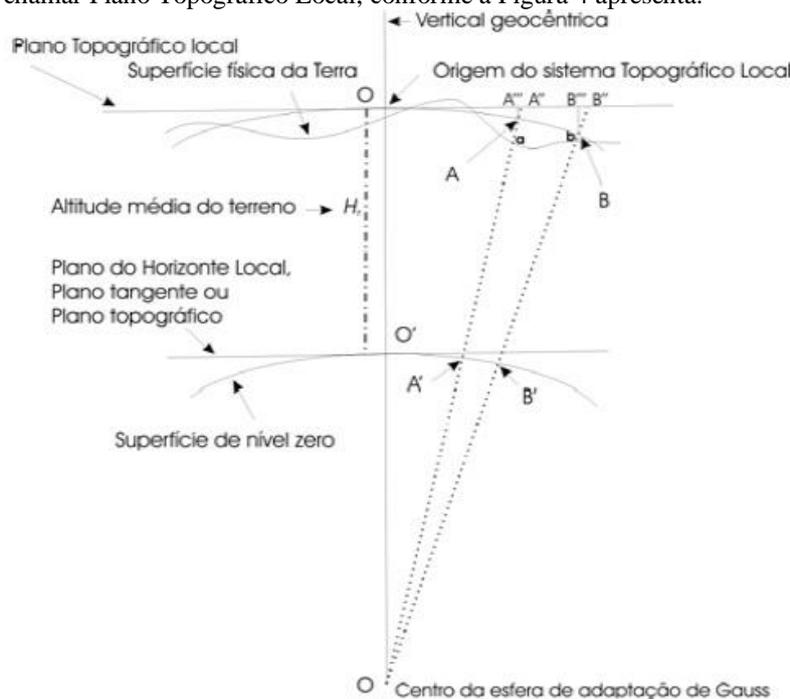


Figura 4 – Representação do Plano Topográfico Local. FONTE: NBR 14166/1998.

Para o plano 3D (x, y, z) utiliza-se conceitos da Geometria Descritiva, também chamada de Geometria Mongeana ou Método de Monge. É um ramo da geometria que tem como objetivo representar objetos de três dimensões (no caso deste trabalho edificação predial de grande porte) em um plano bidimensional. A linha da Terra é a reta de intersecção entre os planos de projeção propostos por Monge, chama-se de Vertical (ou Frontal) e Horizontal, os quais dividem o espaço em quatro diedros ou quadrantes.

Na dissertação de mestrado intitulada: "Geodesia Aplicadas aos Estudos de Verticalização Predial de Grande Porte" (ARAÚJO, 2013) foram definidas duas áreas testes. Na área teste – 1: Bairro Casa Amarela, os pontos de referência foram determinados em um Sistema Topográfico Local arbitrário, com origem (100,000 m, 100,000 m, 0,000

ARAÚJO, A I Paz de, SEIXAS. Andréa de.

m), onde o eixo Y foi definido no alinhamento do vértice EC1 para o vértice EC2. Conforme se pode visualizar nas Figuras 5(a) produzida pelo programa AstGeoTop (2011) e 5(b) foto tirada em campo.

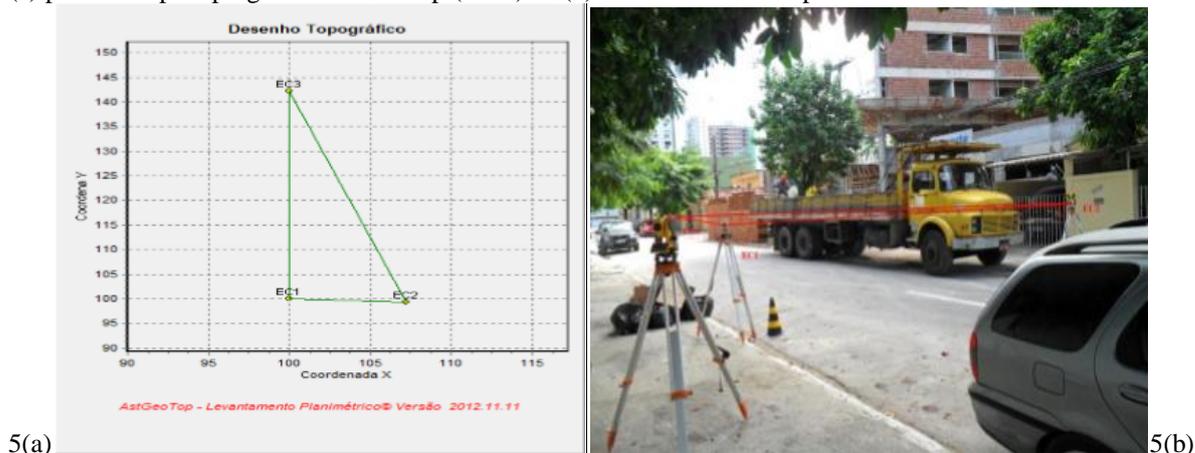


Figura 5– Desenho Topográfico da Poligonal implantada na primeira visita para a determinação dos pontos de referência EC1, EC2 e EC3 (a) e Configuração dos vértices EC1 e EL4 para a determinação da terceira linha de prumo vertical em relação ao primeiro pavimento (b). FONTE: ARAÚJO (2013).

A área teste -2: *Campus* Recife UFPE tem as coordenadas definidas no Sistema Topográfico Local SIRGAS2000, conforme apresentado em Mendonça et al. (2010).

2.5 Soluções matemáticas empregadas nos métodos geodésicos/topográficos para a determinação da verticalidade

Existem vários métodos no ramo da Matemática, que possibilitam a resolução dos métodos geodésicos de medição para a determinação da verticalidade. No Quadro 1 representam-se os métodos utilizados neste trabalho e sua respectiva solução matemática.

Método Topográfico/Geodésico	Solução Matemática
Poligonação com Centragem Forçada	São medidos os ângulos entre alinhamentos consecutivos e as distâncias entre os vértices vizinhos, assim determina-se as coordenadas retangulares de seus vértices.
Interseção a Ré	Baseia-se na interseção de pelo menos duas linhas retas. Usa-se a trigonometria na resolução.
Interseção a Vante	Utiliza de métodos trigonométricos para a determinação das coordenadas.
Transformação de Similaridades entre Coordenadas	Expressa a relação entre dois sistemas de coordenadas por meio de duas translações e uma rotação e um fator de escala. Utiliza conceitos da álgebra linear.
Método dos Mínimos Quadrados	Consiste em minimizar a soma dos quadrados dos resíduos.
Levantamento Planialtimétrico a partir de Três Distâncias e Três Pontos Conhecidos	Baseia-se na determinação de um ponto inacessível a partir de três pontos de coordenadas e distâncias conhecidas. Utiliza conceitos da Geometria e Trigonometria.
Nivelamento Trigonométrico	Baseia-se na resolução de triângulo retângulo, do qual se conhece um dos catetos (distância horizontal) e se procura determinar o outro cateto (diferença de nível).
Nivelamento Geométrico	Baseia-se na determinação das interseções de um plano com uma série de visadas verticais.

Quadro 1: Métodos geodésicos/topográficos de Medição e sua Solução Matemática. FONTE: ARAÚJO (2013).

Os métodos citados no Quadro 1 são definidos em Jordan (1944), Kahmen & Faig (1988), Espartel, Lélis (1978) e em Erba et al. (2005).

3 METODOLOGIA DO TRABALHO

3.1 Metodologia

Inicialmente, realizou-se o levantamento bibliográfico e a partir da escolha das áreas testes, iniciou-se a implantação do campo de pontos de referência e campo de pontos-objeto. Para a implantação do campo de pontos de referência na área teste 1 foram escolhidos os seguintes métodos: Poligonação com Centragem Forçada, Interseção a Ré, Interseção a Vante e Nivelamento Trigonométrico. A medição do campo de pontos de referência foi realizada com o emprego de estações totais. O campo de pontos-objeto foi definido na área teste 1 a partir dos métodos: interseção a vante e nivelamento trigonométrico e levantamento planialtimétrico a partir de três distâncias e três pontos conhecidos.

Na área teste 2 com respeito a implantação dos pontos de referência foram empregados os métodos de poligonação fechada com centragem forçada, nivelamento trigonométrico e nivelamento geométrico. A medição dos pontos de referência foi realizada com o emprego de estação total e nível digital.

Finalizados os procedimentos de campo, deu-se início ao processamento, análise dos resultados e comparação entre os métodos empregados.

A Figura 6 descreve em fluxograma as etapas do desenvolvimento metodológico realizado nas áreas testes 1 e 2 com respeito a implantação dos pontos de referência e medição dos pontos-objeto.

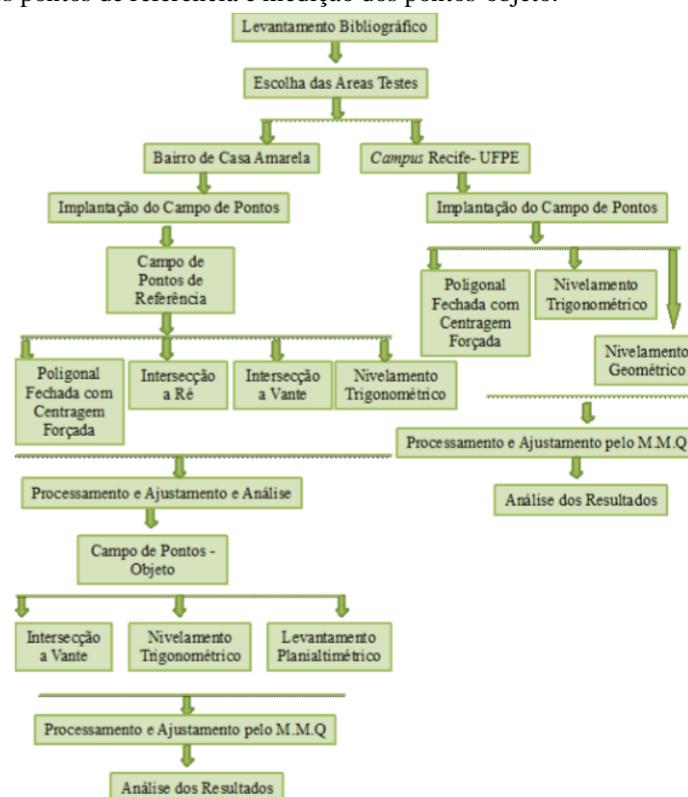


Figura 6– Fluxograma apresentando a sequência dos procedimentos metodológicos: Área Teste 1- Bairro de Casa Amarela e Área Teste 2- *Campus Recife- UFPE*. FONTE: ARAÚJO (2013).

3.2 Materiais

Para a realização deste trabalho foram utilizados os seguintes equipamentos e *softwares*:

- 1) Estação Total 3305 DR (Trimble): Precisão angular de 5'' e Precisão linear de 5mm+5pmm. Modo de leitura com distanciômetro eletrônico (EDM-Eletronic Distance Measurement): Prisma Reflex (PR). Esta Estação Total é também capaz de medir a distância lançando o feixe diretamente sobre a superfície do objeto. Este último modo de medição de distância não foi empregado nesta dissertação. Acompanhada do respectivo apoio logístico;
- 2) Nível Digital DNA03 (Leica): Precisão de 0,3mm/km duplo nivelado. Visor de grandes dimensões, teclado alfanumérico, movimento horizontal, bi-direcional, possui bateria do tipo câmara de vídeo, compensador de amortecimento magnético. Acompanhada do respectivo apoio logístico;
- 3) *Software* MATLAB, versão 9.0;

- 4) Planilha no Excel versão 2007;
- 5) *Software AstGeoTop* versão 2012, versão disponibilizada para intersecção direta (Vante) foi a 2012.06.10, para levantamento planimétrico © versão 2012.11.11, para planialtimetria © versão 2013.05.06, para componente vertical versão 2012.06.10 e o cálculo de ângulo horizontal e zenital a versão 2012.05.23.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Este trabalho apresentará uma pequena parcela dos resultados obtidos para a determinação dos campos de pontos de referência e pontos-objeto. A Tabela 1 mostra a determinação dos pontos de referência da área teste 1- Bairro de Casa Amarela, obtidos através do método de poligonização com centragem forçada.

Tabela 1 – Cálculo da Poligonal.

ESTAÇÃO	PONTO VISADO	AZIMUTE	DHz (m)	ΔX (m)	ΔY (m)
EC1					
EC1	EC3	00° 00' 00"	42,242	0,0000	42,2420
EC3	EC2	170° 28' 15"	43,575	7,2138	-42,9737
EC2	EC1	275° 46' 52"	7,249	-7,2121	0,7302
Σ			93,066m	0,0017	-0,0015

Continuação da Tabela 1

$C\Delta X$ (m)	$C\Delta Y$ (m)	ΔX_c (m)	ΔY_c (m)	X (m)	Y (m)
				100,0000	100,0000
-0,00076933	0,00070305	0,00107566	42,24183982	99,9992	142,2427
-0,00079360	0,000725236	7,21338452	-42,97276523	107,2123	99,2697
-0,00013202	0,000120648	-7,21230859	0,729974518	100,0000	100,0000
		0,00000027m	-0,0009508m		

Tabela 1– Cálculo da Poligonal. Fonte: ARAÚJO (2013).

Inicialmente foram determinados três pontos de referência (EC1, EC2 e EC3), a partir deles foram medidos todos os outros pontos de referência à medida que as visitas eram realizadas. A Tabela acima mostra o resultado obtido pelo *software* Excel.

A Tabela 2 mostra os resultados obtidos para quatro vértices determinados na terceira visita através dos vértices fixos, que estão detalhados na Tabela 1, tais vértices foram denominados de (EL1, EL2, EL3 e EL4), determinados pelo método de Transformação por Similaridade entre Coordenadas e o ajustamento foi calculado pelo método dos Mínimos Quadrados (MMQ), realizou-se também o cálculo do teste do Qui-Quadrado (χ^2), onde todos os vértices tiveram a hipótese H_0 aceita ao nível de confiança de 95%.

ESTAÇÃO	X (m)	SIGMA X (m)	Y (m)	SIGMA Y (m)	χ^2
EL1	100,0572	0,0106	79,3576	0,0009	$35,76 \leq 49,64$
EL2	109,0352	0,0121	77,7232	0,0011	$33,79 \leq 46,54$
EL3	98,6071	0,0153	148,0911	0,0012	$18,79 \leq 19,36$
EL4	99,6269	0,0178	153,3475	0,0015	$24,40 \leq 32,04$

Tabela 2– Coordenadas dos vértices EL1, EL2, EL3 e EL4 ajustados. Fonte: ARAÚJO (2013).

Tais vértices foram de suma importância para a determinação dos pontos-objeto, tais pontos foram calculados pelo método de intersecção a vante que utiliza métodos trigonométricos para a determinação das coordenadas dos pontos, (cf. Quadro 1), tais pontos-objeto estavam localizados na quina da edificação predial.

A Tabela 3 apresenta uma amostra das quinas que foram determinadas na quarta visita a área teste 1- Bairro de Casa Amarela também foi realizado o cálculo do teste do Qui-Quadrado (χ^2), onde todos os vértices tiveram a hipótese H_0 aceita ao nível de confiança de 95%.

Vértices	Quinas	X (m)	(σ) m	Y(m)	(σ) m	Teste (χ^2)
EL1/EL2	EL112D/EL212D	116,5609	0,0457	117,3345	0,017111	PASSOU
EL1/EL2	EL113D/EL213D	116,5791	0,0371	117,3223	0,01389	PASSOU
EL1/EL2	EL114D/EL214D	116,5247	0,0166	117,3329	0,006216	PASSOU
EL1/EL2	EL115D/EL215D	116,519	0,0065	117,3506	0,002924	PASSOU
EL1/EL2	EL116D/EL216D	116,5366	0,0057	117,3530	0,002546	PASSOU
EL1/EL2	EL111E/EL211E	116,2330	0,0618	117,5036	0,022728	PASSOU
EL1/EL2	EL112E/ EL212E	116,2309	0,0164	117,4949	0,006024	PASSOU
EL1/EL2	EL113E/ EL213E	116,2426	0,0159	117,4868	0,00584	PASSOU
EL1/EL2	EL114E/ EL214E	116,2139	0,0162	117,3876	0,005965	PASSOU
EL1/EL2	EL115E/ EL215E	116,2327	0,0159	117,4786	0,005862	PASSOU
EL1/EL2	EL116E/ EL216E	116,2160	0,0153	117,4357	0,005623	PASSOU
EL1/EL2	EL117E/ EL217E	116,1855	0,0139	117,4029	0,005115	PASSOU

Tabela 3– Coordenadas ajustadas das quinas direita e esquerda da face frontal. Fonte: ARAÚJO (2013).

Percebe-se que os dados obtidos e calculados com o objetivo de verificar verticalidade da edificação predial de grande porte é de grande importância o conhecimento e iteração das ciências de Engenharia Civil, Geodesia e Matemática, tais ciências auxilia para a determinação e monitoramento da verticalidade em edificações de grande porte vertical.

5 CONCLUSÕES

Este trabalho teve como objetivo apresentar os assuntos da Matemática que estão correlacionados com os conceitos da Geodésia, como equações diferenciais e o processo de linearização, sistemas de coordenadas retilíneas e curvilíneas, transformação de similaridade entre coordenadas e definição matemática da verticalização de uma edificação. É importante destacar que para utilizar e aplicar estes conceitos no processo de verticalização existe a necessidade de conhecimentos matemáticos prévios como os conceitos da Geometria, Trigonometria, operações com matrizes, cálculo numérico.

Este artigo apresenta a definição matemática de verticalização, utilizando a norma da NBR (14.166/1998). Apresentou-se a importância da Matemática associada com a Geodésia para construções de grande porte vertical. Ressalta-se que este trabalho faz parte de uma pesquisa de mestrado realizada no Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação.

AGRADECIMENTOS

À PROPESQ/UFPE pela oportunidade e pela bolsa de pesquisa concedida através do edital nº 01/2011, ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação pelo recurso disponibilizado e ao LATOP pela instrumentalização utilizada.

REFERÊNCIAS

ABNT. **REDE DE REFERÊNCIA CADASTRAL MUNICIPAL**. NBR 14.166/ 1998.

ARAÚJO, A I Paz de. **Dissertação de Mestrado: GEODÉSIA APLICADA AOS ESTUDOS DE VERTICALIZAÇÃO PREDIAL DE GRANDE PORTE**. Pós- Graduação de Ciências Geodésica e Tecnologias da Geoinformação. Recife, 2013.

BARROS, E. O. **Controle Geométrico da Estrutura de Concreto de Edifícios como Ferramenta da Racionalização Construtiva**. Dissertação (mestrado)-Escola Politécnica da USP: Universidade de São Paulo. São Paulo. 2001.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Editora: Edgard Blücher. Ano 1996.

BOTELHO, F. J. L. **Métodos Geodésicos para Racionalização Construtiva no Posicionamento Preciso de Edificações Prediais**. Dissertação de Mestrado. Pós- Graduação em Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação. Departamento de Engenharia Cartográfica, Recife, Pernambuco. 2003.

DO CARMO, M. P. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. 3ª ed. Editora SBM,2005.

ERBA, Diego Alfonso et al. **Cadastro Multifinalitário como instrumento da política fiscal e urbana**, Rio de Janeiro, RJ, 2005.

ESPARTEL, L. Curso de Topografia. Porto Alegre: Editora Globo. 7ª. Ed.1980.

GARNÉS, S. J. A; **Programa AstGeoTop**. *Software* de cálculo, Universidade Federal de Pernambuco- Recife, Brasil. Versão 2013.

GEMAEL, C. **Introdução ao Ajustamento de Observações: Aplicações Geodésicas**. Curitiba: Ed. UFPR, 1994. Reimpressão 2004.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Analítica**. Editora Atual, 2º Edição. São Paulo, 1977.

JORDAN, W. **Tratado General de Topografia**. Editorial Gustavo Gili S.A., Vol II, Barcelona. 1994.

KAHMEN, H.; FAIG, W. **Surveying**. Berlin. Ed. De Gruyter. 1988.

MENDONÇA, F. J.; GARNÉS, S. J. dos A.; PEREIRA, C. M.; NETO, J. A. B.; MELO, W. D. A. **Análise do Ajustamento por Mínimos Quadrados de uma Trilateração Topográfica com Injunções nos Planos UTM e Topocêntricos**. IV Simpósio Brasileiro de Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação, UFPE. 2010.

WWW.SOMATEMATICA.COM.BR acessado em 28 de Agosto de 2012.