O ÚLTIMO TEXTO DE FREGE*

Fernando Raul Neto**

RESUMO

O último texto de Frege tem por título original *Logische Untersuchugen. Dritter Teil: Gedankengefüge*, publicado em 1923 no terceiro volume dos *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus*. O texto tem merecido, relativamente, pouca atenção dos estudiosos de Frege. Isto, talvez, por se tratar de uma exposição elementar e informal de seis das dezesseis possíveis funções de verdade que se pode construir com duas variáveis proposicionais, assunto que Frege já havia tratado no *Begriffsschrift* e no *Grundgesetze*. Este artigo de Frege, no entanto, é singular por duas razões. A primeira é a excelência estilística e a clareza didática com as quais Frege expõe suas seis funções de verdade. A segunda razão é a nova compreensão de Frege acerca do sentido de expressões funcionais, compreensão que privilegia o uso da linguagem.

PALAVRAS-CHAVE: Frege, Gedankengefüge, Funções de verdade, Pensamento, Didática.

ABSTRACT

The last paper of Frege appeared 1923 and his original titel is

---

* Este artigo é uma versão ampliada da apresentação feita pelo autor no XI Encontro Nacional de Filosofia da ANPOF 18 a 22 de outubro de 2004, em Salvador – BA.

** Fernando Raul Neto. Departamento de Filosofia/Ufpe. Correio: feraneto@uol.com.br.

Logische Untersuchugen. Dritter Teil: Gedankengefüge, edited in the third volume of *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus*. The text, relatively, has deserved little attention by the fregean scholars. Perhaps because it is an elementary and informal exposition from six of the sixteen truth functions that one can form with two propositional variables, which Frege has already worked out in the *Begriffsschrift* and in the *Grundgesetze*. This paper from Frege is singular for two reasons. First is the style and didactic clearness with which Frege expound his six truth functions. Second is the new understanding that Frege brings about the sense of functional expressions, understanding that put the language use in the first plan.

KEYWORDS: Frege, Gedankengefüge, Logical functions, Thought, Didactic

INTRODUÇÃO

O último texto escrito por Frege tem por título original *Logische Untersuchugen. Dritter Teil: Gedankengefüge*, publicado em 1923 no terceiro volume dos *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus*. Como o titulo sugere trata-se da *Terceira parte: Pensamentos Compostos*, de um todo intitulado *Investigações lógicas*, do qual, sabe-se, as duas partes anteriores, *Der Gedanke (O Pensamento)* e *Die Verneinung (A Negação)*, já haviam sido publicadas em 1918 no mesmo jornal.[1] Sabe-se também que as *Investigações lógicas* são o título de um livro de lógica do

[1] As três partes das *Logische Untersuchungen* estão publicadas em [6] e [8]. Uma tradução brasileira do Prof. Paulo Alcoforado encontra-se em [5]. Cito o *Gedankengefüge* pela paginação original dos *Beiträge*. Salvo indicação em contrário seguirei as traduções de Paulo Alcoforado.

qual Frege já havia trabalhado em pelo menos duas versões anteriores; de uma quarta parte planejada, *Logische Allgemeinheit (Generalidade Lógica)*, temos apenas um fragmento.[2] Neste trabalho me detenho no *Gedankengefüge*, o último texto publicado em vida por Frege, para examinar duas questões que a meu ver não obtiveram ainda uma justa atenção. A primeira questão que examino é de estilo, mas, não obstante, não menos oportuna e, acredito, iluminadora do texto. É evidente que não intenciono *apenas* ressaltar aspectos *gerais* do estilo fregeano de filosofar; coisas como sua leveza, perspicácia, ironia, analogias, rigor, etc. É claro que todos estes aspectos juntos fazem da leitura de Frege, antes de qualquer coisa, um ato agradável ao espírito. É justamente este conjunto de aspectos que leva Kenny a dizer que o estilo filosófico de Frege é superado apenas por Platão e Descartes. Para ele *o Grundlagen der Arithmetik*, em particular, é um dos maiores *masterpieces* filosóficos de todos os tempos, pela sua originalidade, lucidez, vigor, economia, espirituosidade, sutileza e profundidade.[3] Meu enfoque acerca do estilo de Frege é mais pontual; defendo que no último texto de Frege encontram-se articulações de estilo e de conteúdo que mostram uma clara preocupação didática de seu autor. A sugestão não deve parecer estranha uma vez que é razoável supor que nos *Pensamentos Compostos* se aprecie essa combinação de estilo, conteúdo e didática depuradas ao máximo. Em primeiro lugar por ser um texto de sua maturidade – é o último texto de Frege! -; em segundo, por ser a última versão de seu antigo projeto de redigir um livro de lógica. Mas este livro de lógica é um

[2] As diferentes versões estão publicadas em [9] e [11]. A primeira versão data, provavelmente, de 1897 e a segunda de 1906. O fragmento *Logische Algemeinheit*, publicado em [5], [9] e [11], é posterior a 1923.

[3] Cf. [13], p. 213.

manual de lógica, é um *livro didático* de lógica e, como tal, duas coisas devem ser observadas em sua leitura: 1) não esperar novidades técnicas ou teóricas, como as trazidas por Frege em sua trilogia básica, o *Begriffsschrift*, o *Grundlagen* e o *Grundgesetze*, e no seu famoso artigo *Sinn und Bedeutung*; 2) não esperar que nele surjam os defeitos que Frege, em toda a sua vida, se dedicou a apontar nos mais diversos autores de matemática. Como se sabe Frege foi um leitor devotado de manuais de matemática, tanto devotado quanto rigoroso e cruel em suas críticas do conteúdo do texto julgado, de sua condução e rigorismo lógicos, da precisão conceitual e, last but not the least, da *didática* dos autores comentados. O que encontrar então nos *Pensamentos Compostos* de Frege, seu – insisto - último texto? É de se esperar um texto decantado ao máximo em pureza e qualidade estilísticas para alcançar o máximo de clareza didática.

A segunda questão que examino trata das reflexões que Frege apresenta acerca do "sentido" de expressões funcionais. Como se sabe o conceito de "sentido" introduzido por Frege em seu artigo *Sinn und Bedeutung* de 1892 é central para a sua filosofia. Neste seu último texto Frege parece ainda se debater com seu conceito chave e explorar possibilidades que somente mais adiante serão desenvolvidas por seus seguidores.

GEDANKENGEFÜGE

O texto de Frege é um texto simples, e não apenas relativamente aos seus demais textos. Um leitor de hoje, interessado apenas nos aspectos técnicos da Lógica, resumiria: uma apresentação elementar de 6 das 16 funções de verdade (que ele contrapõe aos *pensamentos compostos*) possíveis com duas variáveis proposicionais A e B. O texto

possui uma pequena introdução, segue com a exposição de cada um dos seis pensamentos compostos e conclui com uma *Síntese dos seis pensamentos compostos*. Leio com detalhes a introdução. Ela inicia com uma apologia da linguagem digna daquele que será reconhecido como um dos, ou o responsável pela *linguistic turn* na Filosofia:

> É surpreendente o que a linguagem consegue fazer. Com poucas sílabas ela consegue expressar um incalculável número de pensamentos, a tal ponto que até para um pensamento pela primeira vez apreendido por um ser humano, ela encontra uma roupagem através da qual um outro ser humano é capaz de apreende-lo, ainda que esse pensamento lhe seja inteiramente novo.[4]

O tema anunciado é o da relação entre linguagem e pensamento; mas Frege o coloca não para discuti-lo, já o havia feito anteriormente e com autoridade; trata-se agora de dizê-lo, de expô-lo. Expor com precisão, simplicidade e atualidade. Expor didaticamente, este é o desafio. A idéia introdutória é simples e correta em sua formulação ampla: com poucas sílabas a linguagem é capaz de exprimir qualquer pensamento. Ninguém, de fato, chega a questionar, seriamente, a possibilidade de a partir de um mínimo lingüístico se expressar qualquer pensamento que se tenha. Os escritores, ficcionistas ou não, poetas ou prosadores, tem isto como uma certeza inabalável. Nos seus piores momentos eles podem até duvidar de sua inspiração ou de sua veia artística, mas nunca da linguagem. "Me faltam palavras para expressar ..." sempre foi apenas um recurso de retórica, que

[4] Erstaunlich ist es, was die Sprache leistet, indem sie mit wenigen Silben unübersehbar viele Gedanken ausdrückt, daß sie sogar für einen Gedanken, den nun zum ersten Male ein Erdbürger gefaßt hat, eine Einkleidung findet, in der ihn ein Anderer erkennen kann, dem er ganz neu ist. [8], p. 36 e [5], p. 67.

nenhum escritor ou orador considerou mais seriamente. Mas o que Frege deseja com esta platitude?[5] Observe-se: ao comparar a linguagem com o pensamento Frege compara uma parte da linguagem - *poucas sílabas* expressam – com o todo do pensamento - *um incalculável número de pensamentos*. Isto é possível?

> Isto não seria possível se não pudéssemos distinguir no pensamento partes que correspondem a partes de uma sentença, de modo que a estrutura da sentença sirva como imagem da estrutura do pensamento.[6]

Frege ganha aqui um resultado provisório: se o leitor aceitou como evidente a primeira idéia de seu texto, então que aceite também que *no pensamento partes [...] correspondem a partes de uma sentença* ou *a estrutura da sentença* [serve] *como imagem da estrutura do pensamento*. Resultado didático! Realcemos: *didático*, pois Frege tem plena consciência das inúmeras dificuldades presentes em qualquer tipo de isomorfismo entre linguagem e pensamento. A estratégia é didática sim, porque Frege, como verei adiante, apresentará os *Gedankengefüge* (Pensamentos compostos) em analogia com as *Satzgefüge* (Sentenças compostas). Analogia pura e simples, nenhuma pretensão maior de avançar identidades ou relações entre linguagem e pensamento.

[5] Não é propriamente uma platitude. Tanto que hoje discute-se bastante a questão. Meu ponto é a exploração por Frege de um ponto que ele acredita, corretamente a meu ver, não ser problemática para o seu leitor não técnico. É preciso, em qualquer exposição didática, partir de um mínimo de controvérsias. Elas podem ser discutidas a posteriori.

[6] Dies wäre nicht möglich, wenn wir in dem Gedanken nicht Teile unterscheiden könnten, denen Satzteile entsprächen, so daß der Aufbau des Satzes als Bild gelten könnte des Aufbaues des Gedankens. [8], p. 36 e [5], p. 67.

> É verdade que falamos analogicamente quando aplicamos ao pensamento a relação de todo e da parte. Esta analogia porém é tão clara e, de modo geral, tão pertinente, que dificilmente nos deixamos perturbar por suas eventuais imperfeições.[7]

O que Frege fez até aqui foi utilizar a relação parte/todo na linguagem, de fácil aceitação - o todo da linguagem é construído a partir de um mínimo de constituintes que ela possui - para preparar o terreno para duas teses menos óbvias: 1) *também* o pensamento pode ser entendido pela relação parte/todo; 2) há algum tipo de isomorfismo estrutural entre linguagem e pensamento. E isto ele ganhou pela analogia. A analogia é um dos instrumentos privilegiados da boa exposição didática. Através dela tornamos visível o invisível, dizível o inefável, presente o distante, fácil o difícil. E quem dela bem se utiliza sabe de seus limites, foi o que Frege declarou na citação anterior.

Vale a pena me deter mais neste início da exposição para que se perceba em detalhes este movimento analógico empreendido por Frege em sua tentativa de expor didaticamente seus seis *Pensamentos compostos* através da relação linguagem x pensamento. O detalhe que surpreende (estilisticamente) Frege: a *linguagem* com "poucas sílabas [ela] consegue expressar um incalculável número de *pensamentos*", isto é, *partes* da linguagem conseguem exprimir o *todo* do pensamento. Esta tese de que qualquer pensamento pode ser expresso por aquele mínimo de silabas identificado na linguagem "não seria possível" se não se

[7] Freilich sprechen wir eigentlich in einem Gleichnisse, wenn wir das Verhältnis von Ganzem und Teil auf den Gedanken übertragen. Doch liegt das Gleichnis so nahe und trifft im Ganzen so zu, daß wir das hie und da vorkommende Hinken kaum als störend empfinden. [8], p. 36 e [5], p. 67. Em [5] encontra-se 'figuradamente' em lugar de 'analogicamente'.

distinguisse "no pensamento partes" que correspondam a "partes de uma sentença", de modo que "a estrutura da sentença" sirva como imagem da "estrutura do pensamento". É esta conclusão que dá a Frege o gancho necessário para ele fechar uma espécie de círculo na relação linguagem x pensamento e apresentar o tom de sua investigação subseqüente:

> Se encararmos os pensamentos como compostos de partes simples, e se a estas correspondem, por sua vez, partes simples da sentença, então podemos compreender como é possível formar a partir de poucas partes da sentença, uma grande variedade de sentenças as quais, por sua vez, corresponde uma grande variedade de pensamentos.[8]

A direção é do pensamento para a linguagem, pois se trata de, e lembro o título do artigo de Frege, *Pensamentos Compostos*, de entender, a partir do pensamento, como a linguagem funciona. A estratégia didática de Frege pode agora ser explicitada: apresentar seis funções de verdade, objetos de caráter nitidamente lógico-lingüístico, a partir de analogias no pensamento. Desse modo para cada uma das seis funções de verdade que ele escolheu trazer para o seu texto, ele inicia com uma exposição mentalista para, em seguida, após o ganho epistemológico do leitor, trazê-la para a linguagem. Tem sentido assim a pergunta que Frege, na seqüência, traz em seu texto:

[8] Sieht man so die Gedanken an als zusammengesetzt aus einfachen Teilen und läßt man diesen wieder einfache Satzteile entsprechen, so wird es begreiflich, daß aus wenigen Satzteilen eine große Mannigfaltigkeit von Sätzen gebildet werden kann, denen wieder eine große Mannigfaltigkeit von Gedanken entspricht. [8], p. 36 e [5], p. 67.

> Cabe, aqui, perguntar como o pensamento se constrói e como suas partes são combinadas de modo que o todo se torne algo mais do que as partes isoladamente.[9]

O leitor nessa altura do texto deve ter precaução e evitar a tentação de pensar que Frege estaria aqui desenvolvendo algum tipo de *lógica psicológica*, afinal de contas o título do artigo fala de composição de *pensamentos* e as seis funções de verdade que ele expõe no texto, objetos essencialmente lingüísticos, serão tratados sempre em conexão com o que sucede na mente humana. Isto soaria ainda mais estranho ao leitor versado em Frege ou aquele que, pelo menos, leu o *Grundlagen der Arithmetik*, onde se lê explicitamente como um dos princípios básicos da filosofia de Frege: "Deve-se separar o psicológico do lógico, o subjetivo do objetivo".[10] Na realidade o recurso ao pensamento possui dois papéis no texto. O primeiro, já comentado, é de caráter didático; o segundo o de clarear um dos conceitos mais caros à filosofia de Frege: o de sentido de funções lingüísticas. A questão pode ser assim apresentada: uma expressão lingüística qualquer como, por exemplo, "César conquistou as Gálias" pode ser decomposta em duas partes, "César" e ". . . conquistou as Gálias". Frege nos explica que a segunda parte é insaturada, que contém um lugar vazio. Para ele esta parte só ganha sentido completo quando este lugar vazio é preenchido através de um nome próprio, ou de uma expressão que represente um nome próprio. Para Frege o sinal lingüístico insaturado "...

[9] Hier liegt es nun nahe zu fragen, wie der Aufbau des Gedankens geschieht und wodurch dabei die Teile zusammengefügt werden, so daß das Ganze etwas mehr wird, als die vereinzelten Teile. [8], p. 36 e [5], p.67.

[10] Es ist das Psychologische von dem Logischen, das Subjektive von dem Objektiven scharf zu trennen; [2], p. 23 e [10], p. 204.

conquistou as Gálias", uma expressão funcional, tem por referência uma função.[11] Mas qual seria o sentido desta expressão insaturada? O que corresponde a estas funções lingüísticas no âmbito do sentido? O que é mesmo o sentido de uma expressão insaturada? É esta questão, ainda hoje problemática, que Frege em vários de seus escritos tentou clarear e ainda em seu último artigo continua a tentar oferecer uma resposta convincente. Na realidade desde seu artigo anterior, o *Die Verneinung* (A negação), que Frege já vinha analisando essa relação entre expressões lingüísticas insaturadas e o pensamento, ou seja, perguntando pelo sentido de expressões lingüísticas insaturadas. Ele faz a seguinte referência a este artigo anterior:

> Em meu artigo 'A negação' considerei o caso em que um pensamento parece constituído, por um lado, de uma parte carente de complementação ou, em outras palavras, de uma parte insaturada, à qual corresponde na linguagem um negador e, por outro lado, de um pensamento. Não podemos negar sem que exista algo que se negue, e isto é um pensamento. Assim, o todo torna-se coeso pelo fato de o pensamento saturar a parte insaturada ou, como se pode também dizer, completar a parte carente de complementação. Donde a suposição de que no âmbito da lógica, a composição de um todo em suas partes sempre se dá pela saturação de algo insaturado.[12]

[11] Cf. [3], p. 17 e [7], p. 46.

[12] In meinem Aufsatze *Die Verneinung* habe ich den Fall betrachtet, daß ein Gedanke zusammengesetzt erscheint aus einem ergänzungbedürftigen oder, wie man auch sagen kann, ungesättigten Teile, dem sprachlich das Verneinungswort entspricht, und einem Gedanken. Wir können nicht verneinen ohne etwas, was wir verneinen, und dieses ist ein Gedanke. Dadurch, daß der Gedanke den ungesättigten Teil sättigt oder, wie man auch sagen kann, den ergänzungsbedürftigen Teil ergänzt, wird der Zusammenhalt des Ganzen bewirkt. Und die Vermutung liegt nahe, daß im Logischen überhaupt die Fügung zu einem Ganzen immer dadurch geschehe, daß ein Ungesättigtes gesättigt werde. [8], p. 37 e [5], p. 67.

No âmbito do pensamento Frege identifica assim duas partes, uma insaturada, que sozinha não possui sentido - "Não podemos negar sem que exista algo que se negue" – e uma saturada, um pensamento, que completa ou satura a parte insaturada, isto é, torna o todo coeso. Isto corresponde na linguagem a um negador, uma expressão como "¬ . . .", a parte insaturada, que é preenchida ou saturada por uma expressão como "A", que corresponde a um pensamento. Se a *idéia* de Frege parece clara, se o que ele *quer dizer* parece razoável, permanece no entanto a dificuldade de definir, precisamente, o que viria a ser o sentido de uma expressão insaturada. Em suma, no caso da negação, qual é mesmo o sentido de "¬ . . ."? Frege faz uma nova tentativa de esclarecer este ponto na apresentação das seis funções de verdade de duas variáveis A e B que ele na seqüência do texto passa sucessivamente a examinar. Em suas palavras ele examina a composição de dois pensamentos que se combinam de forma a constituir um único pensamento. A esta combinação de pensamentos corresponde no domínio da linguagem a combinação de duas sentenças que constituem um todo que também é uma sentença. O que Frege, neste seu último texto, ainda tenta clarear acerca do sentido das expressões lingüísticas insaturadas fica evidente na articulação que ele organiza entre os planos do pensamento e da linguagem na exposição dos conectivos lógicos.

O primeiro conectivo exposto, ou a *primeira espécie de pensamento composto*, é a conjunção. Frege inicia pela linguagem, analisando o conectivo da conjunção por ser, pensa ele, lingüisticamente falando, o caso mais simples o da composição de duas sentenças independentes associadas mediante o 'e'. O problema pode ser assim enunciado: se "A" e "B" são sentenças, então "A e B" também é uma sentença; qual seria então o sentido de "A e B"? Vejamos sua resposta:

> O "e", definido de modo mais preciso por seu uso, parece duplamente insaturado. Para sua saturação, se exige tanto uma sentença que o anteceda quanto uma sentença que o suceda. O que corresponde ao "e" no domínio do sentido tem também que ser duplamente insaturado; mas ao ser saturado por meio de pensamentos, ele os combina entre si. Enquanto uma coisa, a letra "e" não é mais insaturada do que outra coisa qualquer. Mas no que diz respeito a seu emprego, como um símbolo dotado de sentido, ela pode ser dita insaturada uma vez que ela só pode ter o sentido que se pretende se colocada entre duas sentenças. Sua finalidade como símbolo requer uma complementação mediante uma sentença antecedente e uma conseqüente. A rigor, a insaturação se dá na esfera do sentido, e daí transferida para o símbolo.[13]

Wittgenstein, o Wittgenstein das *Investigações Filosóficas*, leria com imensa satisfação este trecho de Frege. "Enquanto uma coisa, a letra "e" não é mais insaturada do que outra coisa qualquer", afirma Frege, de modo que a expressão duplamente insaturada ". . . e . . . " só é definida precisamente por seu uso. O "e" se torna "um símbolo dotado de sentido", "só pode ter o sentido que se pretende", quando colocada entre duas sentenças. A insaturação, afirma Frege, se dá na

[13] Das so in seiner Gebrauchsweise genauer bestimmte "und" erscheint zwiefach ungesättigt. Es fordert zu seiner Sättigung einen Satz, der vorhergeht, und einen Satz, der folgt. Auch was dem "und" im Gebiete des Sinnes entspricht, muß zwiefach ungesättigt sein. Indem es durch Gedanken gesättigt wird, fügt er diese Gedanken zusammen. Als bloßes Ding ist die Gruppe von Buchstaben "und" freilich ebensowenig ungesättigt als irgend ein anderes Ding. Im Hinblick auf seine Gebrauchsweise als Zeichen, das einen Sinn ausdrücken soll, kann man es ungesättigt nennen, indem es hier nur in der Stellung zwischen zwei Sätzen den gemeinten Sinn haben kann. Sein Zweck als Zeichen verlangt eine Ergänzung durch einen vorhergehenden und einen nachfolgenden Satz. Eigentlich kommt das Ungesättigtsein im Gebiete des Sinnes vor und wird von da aus auf das Zeichen übertragen. [8], p. 39 e [5], p. 71.

esfera do sentido, e daí transferida para o símbolo, e o sentido se ganha no uso.

A conclusão de Frege, na citação acima, de que é o uso lingüístico que fornece sentido às expressões insaturadas é obtida por ele através de um exemplo que ele previamente examinara com detalhes. Ele imagina um julgamento em um tribunal no qual se pergunta aos jurados: "O réu ateou, intencionalmente, fogo à pilha de lenha e provocou, intencionalmente, o incêndio na floresta?"[14] A questão que Frege coloca é se temos uma única pergunta ou duas. Para ele a decisão vai depender do *sentido* que se deseja dar à expressão lingüística. Isto porque se "os jurados têm a possibilidade de responder afirmativamente à pergunta relativa à pilha de lenha, mas negativamente à pergunta relativa ao incêndio na floresta, então temos duas perguntas, cada uma das quais contendo um pensamento."[15] Para Frege não se trataria aqui de um pensamento único formado pela composição de dois pensamentos. O que ele supõe ser o caso é que só é facultado aos jurados responder "sim" ou "não", sem decompor o todo em perguntas parciais. Este todo só pode ser respondido afirmativamente se o réu agiu intencionalmente tanto ateando fogo na pilha de lenha quanto provocando o incêndio na floresta, e negativamente em qualquer outro caso. Este uso é que leva Frege a concluir que o pensamento da pergunta como um todo deve ser distinguido dos dois pensamentos componentes.

A exposição das outras cinco funções de verdade, ou dos outros cinco *pensamentos compostos* como Frege prefere,

[14] Hat der Angeklagte den Holzhaufen absichtlich in Brand gesetzt und absichtlich einen Waldbrand bewirkt? [8], p. 38 e [5], p. 69.

[15] Wenn es den Geschworenen freisteht, die den Holzhaufen betreffende Frage zu bejahen, die den Waldbrand betreffende aber zu verneinen, so habem wir zwei Frage, von denen jede eien Gedanken enthält. [8], p. 38 e [5], p. 69.

segue a mesma estrutura e o estilo da exposição do primeiro pensamento: a apresentação no plano sintático-lingüístico da função de verdade acompanhada de seus comentários acerca do sentido da função.[16] A preocupação com a didática aparece de forma bem nítida na escolha dos exemplos que ilustram *como* a função de verdade em pauta é *usada*. No primeiro conectivo que abordei Frege utiliza com maestria a importante distinção entre o uso lógico do "e" e o seu uso falacioso, o "e" da falácia da pergunta complexa. Para o segundo conectivo, a negação de *A e B*, Frege traz dois números *a* e *b* simbolizados por duas expressões aritméticas razoavelmente complexas que não permitem de forma rápida a estipulação de qual deles é o maior. Mas com certeza sabemos que *não é verdade que ((a > b) e (b < a))*. Observo também que a escolha das funções de verdade também revela a preocupação didática de Frege. As funções *(A e B)*, *não (A e B)*, *(nem A, nem B)*, *(A ou B)*, por exemplo, tem forte apelo da prática lingüística. Esse é o ponto que examino em seguida.

A ESCOLHA DAS SEIS FUNÇÕES DE VERDADE

Mostrei até agora que a apresentação de Frege no *Gedankengefüge* de seis das dezesseis possíveis funções de verdade com duas variáveis revelou uma preocupação com a clareza expositiva que permitia ao seu leitor uma rápida

[16]Frege ora fala de sentido da função, ora do pensamento expresso pela função. O pensamento (Gedanke) é o que se chamaria de proposição. Não explorei esse ponto; não explorei também a distinção que Frege faz entre o pensamento expresso e a asserção (der ausgedrückte Gedanke und die Behauptung) o que de toda forma ele desenvolve de forma mais extensa na primeira parte das *Investigações lógicas*: *O Pensamento* (Der Gedanke).

apreensão dos conceitos introduzidos, uma preocupação claramente didática. Mostrei também que na apresentação dessas seis funções de verdade Frege explora a possibilidade de conceber o sentido de expressões funcionais por meio do uso lingüístico. Vou examinar em seguida o porquê dessa escolha de Frege, examinar os motivos que o levaram a escolher as seis funções de verdade apresentadas e não outras. A questão tem sentido uma vez que é possível várias escolhas e o próprio Frege anteriormente, no *Begriffsschrift* e no *Grundgesetze*, havia apresentado seleções diferentes dessas funções de verdade, em quantidade e em espécie, sete na sua primeira obra e cinco na segunda. Qual a razão das diferenças nas exposições? Frege não apresenta nenhuma, e isto tem motivado especulações dos estudiosos. É o caso de Günther Patzig que coloca e discute a questão na sua introdução ao *Logische Untersuchungen* de Frege, por ele editado. O que motivou a sua discussão, além das diferenças entre as três exposições, é que Frege escreve no *Gedankengefüge* que as suas seis espécies de pensamentos compostos formam *um todo fechado*[17], um erro matemático que, mesmo à época, não lhe teria escapado. Isto é tão verdade que o próprio Frege também afirma, embora sem demonstração, que cada função de verdade com qualquer número de variáveis pode ser reescrita apenas com os conectivos da negação ¬ (não) e da conjunção ∧ (e). Não abordo aqui a questão matemática envolvida, de todo já resolvida por E. L. Post que, em 1936, demonstrou que para n proposições existem 2^{2n} funções de verdade de n lugares. Além do mais, como sabido, Frege é extremamente rigoroso e meticuloso em suas exposições matemáticas, mas nas três exposições onde ele apresenta as funções de verdade para o

[17] Unsere sechs Arten von Gedankengefügen bilden so ein abgeschlossenes Ganzes; [6], p. 87:

cálculo proposicional ele *não* aborda a questão da completude dos conectivos lógicos. De modo que me detenho na elucidação da divergência entre as três exposições. Examino mais de perto o caso de duas variáveis proposicionais *A* e *B*, o caso abordado por Frege. Existem quatro opções para afirmá-las ou negá-las:

Tabela 1

		A	B
1	A é afirmado e B afirmado	1	1
2	A é afirmado e B negado	1	0
3	A é negado e B afirmado	0	1
4	A é negado e B negado	0	0

Podemos agora pensar as diversas maneiras como essas duas proposições se relacionam. Por exemplo, pode ser o caso que *A* e *B* só ocorram conjuntamente, isto é, das quatro possibilidades acima apenas o caso 1, A é afirmado e B afirmado, sucede. Formamos assim o conectivo $\wedge$ da conjunção lógica de duas proposições. É dessa forma que Frege introduz no §5 do *Begriffsschrift* o conectivo da condicional (Die Bedingheit), isto é, a condicional significa que não sucede a terceira das quatro possibilidades acima, apenas uma das três outras. Na linguagem de hoje, $A \rightarrow B$ é definido como logicamente equivalente a $\neg (A \wedge \neg B)$. Todas as opções estão no quadro abaixo:[18]

[18] Para facilitar a referência colocamos as sete primeiras em negrito, exatamente as que Frege utilizará em suas diferentes exposições. Como já está claro para o leitor não utilizo a notação "plana" de Frege, uso a de Hilbert.

Tabela 2

A	B	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	1	1	1	1	1	0	0	0	0
1	0	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	1	0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	1	1	0	1	0	0	1	0	0
0	0	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	1	1	0	0	1	1	1	1	0

No *Begriffsschrift* Frege parte do composto básico 1 (ver tabela 2 acima) e da negação. Com eles Frege compõe mais 6 compostos (ver tabela 3 abaixo). No *Grundgesetze* Frege ainda parte do composto básico 1 escolhido em sua obra anterior, mas com ele compõe apenas mais quatro outros (6, 4, 7 e 3), deixando de fora os compostos 2 e 5. Observemos ainda que a ordem de apresentação dos compostos escolhidos difere da anterior. No *Gedankengefüge* Frege apresenta 6 compostos, excluindo apenas o de número 5 do *Begriffsschrift*. Em símbolos modernos temos a seguinte tabela:

Tabela 3

Begriffsschrift (1879)	**Grundgesetze (1893)**	**Gedankengefüge (1911)**
1) $B \rightarrow A$	1) $B \rightarrow A$	4) $A \wedge B$
2) $B \rightarrow \neg A$	6) $\neg (B \rightarrow A)$	2) $\neg (A \wedge B)$
3) $\neg B \rightarrow A$	4) $\neg (B \rightarrow \neg A)$	7) $\neg A \wedge \neg B$
4) $\neg (B \rightarrow \neg A)$	7) $\neg (\neg B \rightarrow A)$	3) $\neg (\neg A \wedge \neg B)$
5) $\neg ((B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg (\neg B \rightarrow A))$	3) $\neg B \rightarrow A$	6) $\neg A \wedge B$
6) $\neg (B \rightarrow A)$		1) $\neg (\neg A \wedge B)$
7) $\neg (\neg B \rightarrow A)$		

É evidente que Frege não pretende em nenhuma de suas três exposições das funções de verdade de dois lugares uma apresentação sistemática de todas as 16 possibilidades a partir de um mínimo delas. Patzig em sua análise opõe as duas primeiras exposições de Frege contra a terceira. Para ele

seria difícil indicar para essas duas algum princípio plausível que justificasse a escolha fregeana das funções, na sua qualidade, na quantidade e na ordem de apresentação delas. Para ele a escolha de Frege teria sido simplesmente, lembrando uma famosa expressão kantiana, *rapsódica*. Descartando a opção de uma apresentação sistemática por parte de Frege, Patzig tenta dois possíveis caminhos: a naturalidade lingüística, isto é, a confiabilidade que a linguagem cotidiana traria para as funções escolhidas ou a simplicidade estrutural das fórmulas. Na primeira hipótese Frege deveria ter escolhido, no *Begriffsschrift*, a disjunção e conjunção, fórmulas 3 e 4 (Tabela 2) antes da fórmula 2, pouco utilizada na linguagem ordinária. Seguindo o princípio da naturalidade, no *Grundgesetze* deveria surgir 4 antes de 6, e 3 antes de 7, diferentemente da escolha fregeana. Na hipótese da simplicidade estrutural, Frege haveria de apresentar, no *Begriffsschrift*, 6 antes de 4 e as funções 6 e 7 antes de 5. No *Grundgesetze*, por seu turno, embora a fórmula 6, com apenas um sinal de negação, anteceda as fórmulas 4 e 7, com dois sinais de negação, Frege não deixa claro se a fórmula 3 deve ser entendida com um ou três sinais de negação. Além disso, não se sabe porque Frege abandona no *Grundgesetze* as fórmulas 2 e 5 do *Begriffsschrift*.

No *Gedankengefüge*, segundo Patzig, Frege teria escolhido a conjunção, fórmula 4, como ponto de partida, seguindo o critério da confiabilidade lingüística, mais adequado a um texto de Filosofia da lógica, como seria o caso do texto em pauta. Além disso, veríamos uma progressiva construção sistemática das demais fórmulas a partir dessa escolha inicial e sucessivas negações. Em nossa tabela 3 verificamos rapidamente essa hipótese de Patzig. Evidente que a fórmula 5 do *Begriffsschrift* teria de ser abandonada em tal construção.

São bons os critérios da naturalidade lingüística e da simplicidade estrutural pensados por Patzig para justificar a escolha fregeana das funções de verdade em cada um dos três textos em pauta, mas penso que é necessário alguns ajustes para que eles expliquem se não de todo pelo menos torne um pouco mais clara a escolha fregeana. De início é difícil que a naturalidade lingüística tenha sido o único critério utilizado por Frege no *Begriffsschrift* e no *Grundgesetze*, textos extremamente técnicos que executam o propósito explícito de Frege de estabelecer uma linguagem precisa que sirva para fundamentar a ciência e que evitasse as ambigüidades da linguagem natural. Quanto à *simplicidade* acredito que ela não deva ser procurada no nível sintático, na estrutura externa das funções de verdade, o que de todo modo o próprio Patzig já mostrou não ocorrer. É verdade que Frege no *Begriffsschrift* (§§ 5 - 8) introduz as suas sete funções de verdade na seguinte seqüência: primeiro a condicional (1 na Tabela 3), depois a negação, e, de posse dos símbolos por ele escolhido para a condicional e a negação acrescenta sucessivamente a negação ao condicional obtendo as demais funções (2 a 7 na Tabela 3). Mas é preciso notar que Frege faz acompanhar a introdução da expressão simbólica de cada função de verdade com uma explicação que faz referência direta às possibilidades de afirmação e negação de *A* e *B* (ver a Tabela 1). Esse é o critério que Frege utiliza para estabelecer cada uma das expressões simbólicas das suas funções de verdade juntamente com a simplicidade no seu uso. A Tabela 4 mostra a utilização do critério. "N" e o "S" significam *não ocorre* e *ocorre* cada uma das quatro possibilidades mostradas na Tabela 1, respectivamente. Por exemplo N3, a primeira fórmula do *Begriffsschrift*, significa negar a possibilidade 3 mostrada na Tabela 1, isto é, negar

que *A é negado e B é afirmado*; isto é equivalente à fórmula $B \rightarrow A$.

Tabela 4

Begriffsschrift		Grundgesetze		Gedankengefüge	
1.	N3	1.	N3	4.	S1
2.	N1	6.	S3	2.	N1
3.	N4	4.	S1	7.	S4
4.	S1	7.	S4	3.	N4
5.		3.	N4	6.	S3
6.	S3			1.	N3
7.	S4				

O critério mostra claramente que Frege no *Begriffsschrift* opta por apresentar de início as ocorrências e depois as não ocorrências de cada uma das possibilidades da Tabela 1. É claro que não é preciso negar todas as quatro; por exemplo, o caso N2, negar a possibilidade 2, isto é, que A é afirmado e B é negado, produz simplesmente a função $B \rightarrow A$ que repete a condicional escolhida em 1. Claro que a função de verdade $\neg ((B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg (\neg B \rightarrow A))$, a quinta na seqüência de Frege não se deixa enquadrar no critério, uma vez que afirmar 2 da Tabela 1 é repetir uma das demais escolhas feitas. Mas é aqui que o apelo à linguagem natural, a naturalidade lingüística de Patzig, pode ser convocada. As funções 1, 2 e 3, as negações das possibilidades 3, 1 e 4 da Tabela 1, nada mais são que a introdução das diversas situações do conectivo "ou" da linguagem natural. Em seguida Frege apresenta a função 4, a primeira situação do conectivo "e" da linguagem natural. As funções 6 e 7 são outras situações do conectivo "e". Dessa forma é possível explicar a aparente discrepância da função de número 5. Ela é justificada exatamente porque corresponde ao "A ou B, mas não ambos" da linguagem natural. A escolha do *Grundgesetze* não se deixa explicar, pelo menos de forma

visível, pelo critério estabelecido. Seria o caso, talvez, de recorrer ao critério "rapsódico" de Patzig.

O caso do *Gedankengefüge* é diferente; ele parece enquadrar-se à perfeição em nosso critério. A escolha alternada de ocorrências e não ocorrências das possibilidades da Tabela 1 e a exclusão da função de verdade 5 do *Begriffsschrift* que não se enquadrava no critério estabelecido. O texto de Frege, como foi mostrado neste artigo, cuidou de combinar essa escolha criteriosa com uma apresentação não formal das funções de verdade que se revela como paradigma de exposição didática.

BIBLIOGRAFIA

[1] Frege, Gottlob: *Begriffsschrift und andere Aufsätze*. 5ª reimpressão da 2ª edição (1964). Com as observações de E. Husserl e H. Scholz. Editado por Ignacio Angelelli. Georg Olms Verlag, Hildesheim, 1998.

[2] Frege, Gottlob: *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Philipp Reclam Jun., Stuttgart, 1995. Com uma introdução de Joachim Schulte.

[3] Frege, Gottlob: *Funktion, Begriff, Bedeutung*. Fünf logische Studien. Editado e introduzido por Günther Patzig. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1986.

[4] Frege, Gottlob: *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet, I, II*. Georg Olms Verlag, Hildesheim, Zürich, New York, 1998. Segunda impressão, em um único volume, das edições de 1893 (Vol. I) e 1903 (Vol. II), Jena, Verlag von Hermann Pohle.

[5] Frege, Gottlob: Investigações lógicas. Organização, tradução e notas de Paulo Alcoforado. EDIPUCRS, Porto alegre, 2002.

[6] Frege, Gottlob: *Kleine Schriften*. Segunda edição, editada por Ignacio Angelelli, com observações à primeira edição (1967). Georg Olms Verlag, Hildesheim-Zürich-New York, 1990.

[7] Frege, Gottlob: *Lógica e Filosofia da Linguagem*, com uma introdução de Paulo Alcoforado Cultrix/Edusp, São Paulo, 1978.

[8] Frege, Gottlob: *Logische Untersuchungen*. Editado e introduzido por Günther Patzig. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1966.

[9] Frege, Gottlob: *Nachgelassene Schriften*. Introdução e observações de Hans Hermes, Friedrich Kambartel e Friedrich Kaulbach, com a colaboração de Gottfried Gabriel e Walburga Rödding. Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1969. Segunda edição ampliada, 1983.

[10] Frege, Gottlob: *Os fundamentos da aritmética. Uma investigação lógico-matemática sobre o conceito de número*, tradução e introdução de Luiz Henrique Lopes dos Santos *in* Peirce-Frege: *Coleção Os Pensadores*, Abril Cultural, São Paulo, 1980.

[11] Frege, Gottlob: Posthumous Writings. Basil Blackwell, Oxford, 1977. Tradução de [9] por Peter Long e Roger White, com a colaboração de Raymond Hargreaves.

[12] Frege, Gottlob: *Sobre a justificação científica de uma conceitografia*, tradução e introdução de Luiz Henrique Lopes dos Santos *in* Peirce-Frege: *Coleção Os Pensadores*, Abril Cultural, São Paulo, 1980.

[13] Kenny, Anthony: *Frege. An Introduction to the Founder of Modern Analytic Philosophy*. Blackwell Publishers, 2000. Primeiro: Penguin Books, 1995

[14] Kneale, W.; Kneale, M.: *O desenvolvimento da lógica*. 3ª edição. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1991.

[15] Patzig, Günther: *Sprache und Logik*. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1981.