
AVALIAÇÃO DE MÉTODOS DE INTERPOLAÇÃO PARA O MAPGEO2015

DANIEL ARANA ¹
FABRICIO DOS SANTOS PROL ¹
PAULO DE OLIVEIRA CAMARGO ^{1,2}
GABRIEL DO NASCIMENTO GUIMARÃES ³

Universidade Estadual Paulista - UNESP
Faculdade de Ciências e Tecnologia - FCT - Presidente Prudente - SP

¹Programa de Pós-Graduação em Ciências Cartográficas

² Departamento de Cartografia,

arana990@gmail.com, fabricioprol@hotmail.com, paulo@fct.unesp.br

³ Universidade Federal de Uberlândia, Campus Monte Carmelo
gabriel@ufu.br

RESUMO – Ainda que se utilizem as mais recentes e modernas técnicas para obtenção dos modelos geoidais a extração de informação da grade regular gerada por meio de um interpolador, que não representa fielmente a superfície geoidal, pode prejudicar a qualidade das ondulações obtidas. Pouca atenção tem sido dada aos métodos de interpolação para obtenção de ondulações geoidais a partir de uma grade regular. Esse trabalho objetiva analisar alguns métodos de interpolação visando a obtenção de ondulações geoidais; estudar a capacidade dos interpoladores Splines na representação da superfície geoidal com a variação da espacialidade da grade regular; e comparar a interpolação do programa MAPGEO2015 com os métodos Splines. A partir dos resultados foi estimado que o erro na utilização dos interpoladores Splines, com a grade 5'x5' do MAPGEO2015 é de $\pm 4,0$ cm para toda área de estudo e de $\pm 3,5$ cm para o território nacional.

ABSTRACT - Even with the use of the most recent and modern techniques for obtaining the geoid model, the information extraction from a generated regular grid by an interpolation method, which do not faithfully represent the geoid surface, can impair the quality of the obtained undulations. Not enough attention has been given to interpolation methods to obtain geoid undulations from a regular grid. This work aims to analyze some interpolation methods in order to obtain geoid undulations, study the ability of Spline interpolation in the representation of the geoid surface with the variation of the spatiality of regular grid; and compare MAPGEO2015 program interpolations with Splines methods. From the results it was estimated an error in the use of Splines interpolation with 5'x5' MAPGEO2015 grid of ± 4.0 cm for the entire study area and ± 3.5 cm for the country.

1 INTRODUÇÃO

A obtenção de modelos geopotenciais que melhor representam a superfície equipotencial do campo de gravitacional da Terra tem despertado interesses nas Ciências Geodésicas, principalmente nas aplicações que tem por interesse em determinar a direção de fluxo dos fluidos. Alguns usuários

dos modelos geoidais, como oceanógrafos e geofísicos, necessitam uma qualidade ao nível do decímetro para as ondulações geoidais (KUROISHI, 2009); contudo, determinados trabalhos geodésicos e cartográficos de alta acurácia, como nivelamento/GNSS, unificação global do sistema de altitudes e estudos de deglaciação, exigem uma qualidade próxima de 1 cm (PLAG e PEARLMAN, 2009). Desta forma é indispensável a procura por métodos que proporcionem resultados acurados para os modelos geoidais.

Nos últimos anos, tem-se mostrado uma grande tendência a melhora de modelos geoidais por meio da integração de dados terrestres, aéreos e orbitais. A obtenção de modelos geoidais é normalmente feita por meio da utilização da integral de Stokes modificada e aproximações esféricas, porém, alguns autores (MARTINEC e GRAFAREND, 1997; NAJAFI-ALAMDARI, EMADI e MOGHASED-AZAR, 2006) afirmam que essa metodologia ainda pode resultar em modelos com erros na escala do metro. Contudo, realizada a modelagem do geoide, uma malha regular de ondulações geoidais é disponibilizada para os usuários realizarem interpolações no intuito de obter a ondulação geoidal para distintos pontos. Ainda que os modelos geoidais mais recentes utilizem uma metodologia moderna para obtenção de uma malha regular com a melhor qualidade possível, a extração das informações pelos usuários deve ser realizada de maneira que as interpolações representem fielmente a superfície que a malha representa. Essa tarefa pode não ser tão simples quanto parece pois cada interpolador representa a superfície de acordo com suas próprias características. Pouca atenção tem sido dada a escolha do interpolador na extração de informações da malha, entretanto uma escolha incoerente pode acarretar numa grande perda de qualidade na informação. Portanto uma série de experimentos podem ser realizados de maneira que o interpolador escolhido apresente menor ruído possível para a superfície da malha regular.

Tendo em vista que em cada região o geoide apresenta um comportamento específico, esse trabalho busca analisar interpoladores que podem ser utilizados para obtenção das ondulações do Modelo Geoidal do Brasil, em sua versão mais recente, o MAPGEO2015.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para o desenvolvimento desse trabalho é apresentada uma revisão sucinta na qual descreve-se alguns dos principais interpoladores e um breve histórico sobre o MAPGEO.

2.1 Interpoladores

São diversos os métodos para obtenção de interpolações espaciais, cada um com suas características, vantagens e desvantagens. Dentre esse métodos destacam-se: *nearest neighbour*, conhecido como “vizinho mais próximo”; ponderação pelo inverso da distância; Splines; séries de Fourier; krigagem; e redes neurais artificiais.

Basicamente o método de interpolação por meio de Splines, exemplificado na Figura 1, utiliza diferentes polinômios $s_n(x)$ de grau menor ou igual a k , para cada intervalo entre os pontos de interpolação, de maneira que a continuidade dos valores seja suave e contínua, assim como todas as derivadas até ordem $(k - 1)$.

Dessa maneira, a cada conjunto de pontos tem-se os parâmetros dos polinômios. A escolha do tipo de Spline, seja Linear, Cúbica, Quadrática ou Quíntica, exige um quantidade mínima para obtenção desses parâmetros de $k + 1$ pontos para o caso unidimensional e $(k + 1)^2$ pontos para o caso bidimensional, onde k representa a ordem do polinômio. As Splines de polinômios de baixo-grau são muito úteis para curvas que ajustam polinômios de baixo grau, reduzindo as exigências computacionais e também as instabilidades numéricas que causam oscilações indesejáveis quando são unidos vários pontos em uma curva comum (SUBBOTIN, 2011).

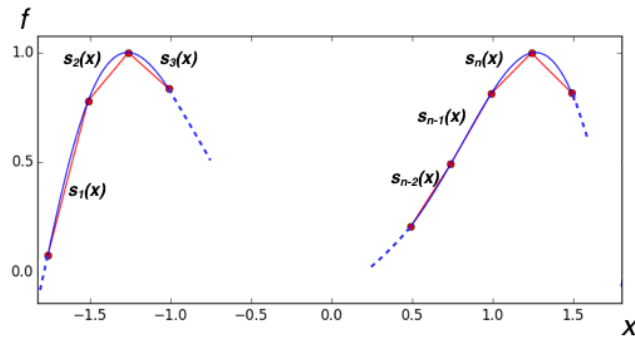


Figura 1 – Representação de Splines Linear (vermelho) e Cúbica (azul)
 Fonte: adaptado de Ruggiero e Lopes (1998)

A interpolação bilinear apresenta características semelhantes à Spline Linear pois necessita de uma quantidade mínima de pontos igual a 4 e também é determinada uma superfície plana entre os dados. Um esquema eficiente para determinação do valor da cota de um ponto P por meio da interpolação bilinear é mostrado na Figura 2. A partir das cotas dos pontos Q_{11} e Q_{21} da célula da grade, que contem o ponto P, inicialmente calcula-se por meio de uma interpolação linear o valor da cota do ponto R_1 . De forma análoga pode-se estimar o valor de R_2 a partir dos pontos Q_{12} e Q_{22} . Finalmente, a partir de R_1 e R_2 o valor de P é estimado novamente com outra interpolação linear.

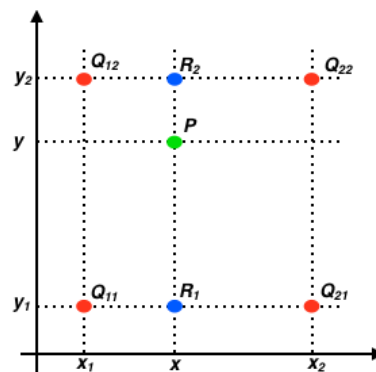


Figura 2 – Interpolação da cota de um ponto P por interpolação bilinear.
 Fonte: adaptado de Pedrini e Schawartz (2008)

2.2 MAPGEO2015

No Brasil, uma das primeiras versões existentes de modelos de ondulação geoidal foi o MAPGEO92. Esse apresentava precisão da ordem de $\pm 3,0$ m (BLITZKOW, CINTRA, *et al.*, 1993) e, posteriormente, surgiu o MAPGEO98, com precisão da ordem de $\pm 1,5$ m (DINIZ, SOUZA, *et al.*, 2004), a versão MAPGEO2004 com precisão de $\pm 0,68$ m (MATOS, BLITZKOW, *et al.*, 2012). Nesse, destaca-se a utilização do EGM96 até grau e ordem 180, um DTM (Modelo Digital de Terreno) de 1' desenvolvido pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (EPUSP), anomalias de Helmert com resolução de 10' e utilização da técnica FFT (*Fast Fourier Transformation*) (LOBIANCO, BLITZKOW e MATOS, 2005).

Em seguida, o modelo sucessor da série MAPGEO foi lançado em 2010, nomeado MAPGEO2010, cuja malha regular foi disponibilizada com resolução de 5'. Tal modelo foi gerado utilizando o EGM08 até grau e ordem 150, 925.878 pontos gravimétricos e também o DNSC08GRA (ANDERSEN *et al.*, 2009) para obtenção das anomalia médias de ar livre.

Essa série de modelos de escala nacional foram desenvolvidos entre parcerias do IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) com a EPUSP, obtendo o mais recente modelo

geoidal lançado em novembro de 2015, denominado MAPGEO2015. Esse apresenta igual resolução espacial na malha regular disponibilizada, porém em virtude da maior densificação de dados gravimétricos e utilização de um modelo geopotencial mais recente, o EIGEN-6C4, o MAPGEO2015 apresenta uma melhora na consistência com o posicionamento GNSS de 20% em relação ao seu antecessor, apresentando um RMS de $\pm 0,17$ m (IBGE, 2015). Dentre as novidades desse modelo, merece destaque a utilização Redes Neurais Artificiais (ANN – *Artificial Neural Network*), nas regiões Sul e Sudeste do Brasil, para obtenção de anomalias de Helmert em regiões com vazios gravimétricos (MACHADO, BLITZKOW e MATOS, 2013). Além disso, destaca-se o uso da FFT e a integral modificada de Stokes, juntamente com uso da técnica *Remove-Restore*, no processo de geração do MAPGEO2015. Mais detalhes sobre o MAPGEO podem ser obtidos em IBGE (2015), Blitzkow (2003), Guimarães, Matos e Blitzkow (2013).

Juntamente com a malha regular do MAPGEO2015, o IBGE também disponibiliza um programa capaz de fornecer ao usuário valores da ondulação geoidal entre as longitudes de $35^{\circ}34'0,12''$ W e $75^{\circ}25'1,19''$ W e entre as latitudes $5^{\circ}34'59,89''$ N e $35^{\circ}25'1,19''$ S. Segundo IBGE (2016)¹, este programa realiza uma interpolação bilinear na malha regular de ondulações geoidais, permitindo determinar valores para distintos pontos sobre a região brasileira.

3 METODOLOGIA

A metodologia consistiu na realização de alguns experimentos para avaliação da capacidade dos interpoladores Spline na adaptação e previsão da superfície geoidal a partir de uma malha regular. Para isso foi utilizada a plataforma *Python 2.7.9*, onde os interpoladores estão implementados na biblioteca *SciPy 0.15.1*, disponível também gratuitamente.

Para os experimentos foram utilizados o programa e a malha regular de 5'x5' do MAPGEO2015, disponibilizados gratuitamente para download (ftp://geofp.ibge.gov.br/aplicativos/sistema_interpolacao_ondulacao_geoidal/setup_mapgeo2015_v1.exe).

Para aplicação da metodologia proposta a área de estudo escolhida coincide com a região que o programa de interpolação do MAPGEO2015 é capaz de fornecer ondulações geoidais, compreendendo as longitudes $35^{\circ}34'0,12''$ W e $75^{\circ}25'1,19''$ W e as latitudes $5^{\circ}34'59,89''$ N e $35^{\circ}25'1,19''$ S. Na Figura 3 mostra-se os valores das ondulações geoidais do MAPGEO2015 para área de estudo.

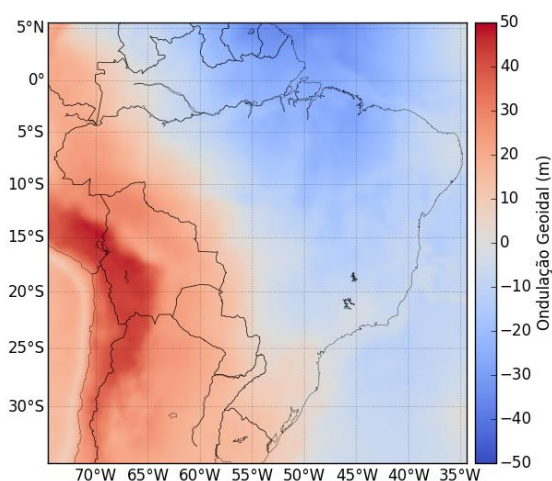


Figura 3 – Ondulação geoidal sob a área de Estudo - MAPGEO2015 (SIRGAS2000)

¹ Correspondência eletrônica trocada no dia 13 de Maio de 2016 com a Equipe técnica da Gerência da Rede Gravimétrica e Desenvolvimento do Geóide do IBGE (Atendimento Numero:#90996/2016 - 3#).

A partir da malha inicial, quatro reamostragens da grade foram realizadas: 10'x10', 15'x15', 20'x20' e 25'x25'. Os pontos que não participaram da reamostragem e internos à 30' dos limites da área de estudo foram utilizados como verificação de forma a comparar se as respectivas malhas são suficientes para representação da superfície geoidal na região de estudo. Um exemplo da reamostragem da malha regular e a escolha dos pontos de validação é mostrado na Figura 4.

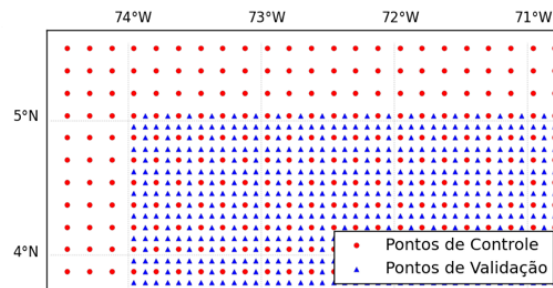


Figura 4 – Exemplo de reamostragem (10'x10') e escolha dos pontos de validação

Os pontos de validação foram interpolados a partir das grades reamostradas utilizando diferentes Splines: (1) Linear, (2) Cúbica e (3) Quíntica. Esses valores interpolados foram comparados com seus valores iniciais referentes à grade de 5'x5'. Ademais, para uma comparação entre o programa MAPGEO2015 e esses interpoladores, foi realizada uma reamostragem da grade para 2,5'x2,5'.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

A representação das diferenças entre os valores interpolados para as Splines (Linear, Cúbica e Quíntica) e os valores dos pontos de validação para as reamostragens de 10'x10', 15'x15', 20'x20' e 25'x25' são mostrados na Figura 5. Qualitativamente as diferenças entre os interpoladores para a mesma reamostragem pouco podem ser notadas para a malha 10'x10'. A partir da reamostragem de 15'x15' nota-se que a Spline Linear apresenta maior diferença entre os valores interpolados e os esperados principalmente para a região dos Andes e a região litorânea do Brasil. O aumento do espaçamento para as reamostragens mostra que o interpolador linear não é ideal para representação da superfície onde o geóide apresenta maior variação. Para essas regiões as Splines Cúbicas e Quíntica mostraram ser mais eficientes.

Uma análise quantitativa das diferenças é mostrada na Figura 6, onde são plotadas as diferenças em função da longitude dos pontos de validação. Novamente evidencia-se maiores diferenças nas regiões extremas da área de estudo, onde são contidos os Andes e o litoral do Brasil. Essas regiões são responsáveis por apresentar maiores diferenças devido a dois fatores: (1) espacialidade da malha do modelo geoidal não ser suficiente para representação da superfície e (2) maior variabilidade do geóide na região. Tais regiões necessitam de malhas menos espaçadas e interpoladores mais eficientes.

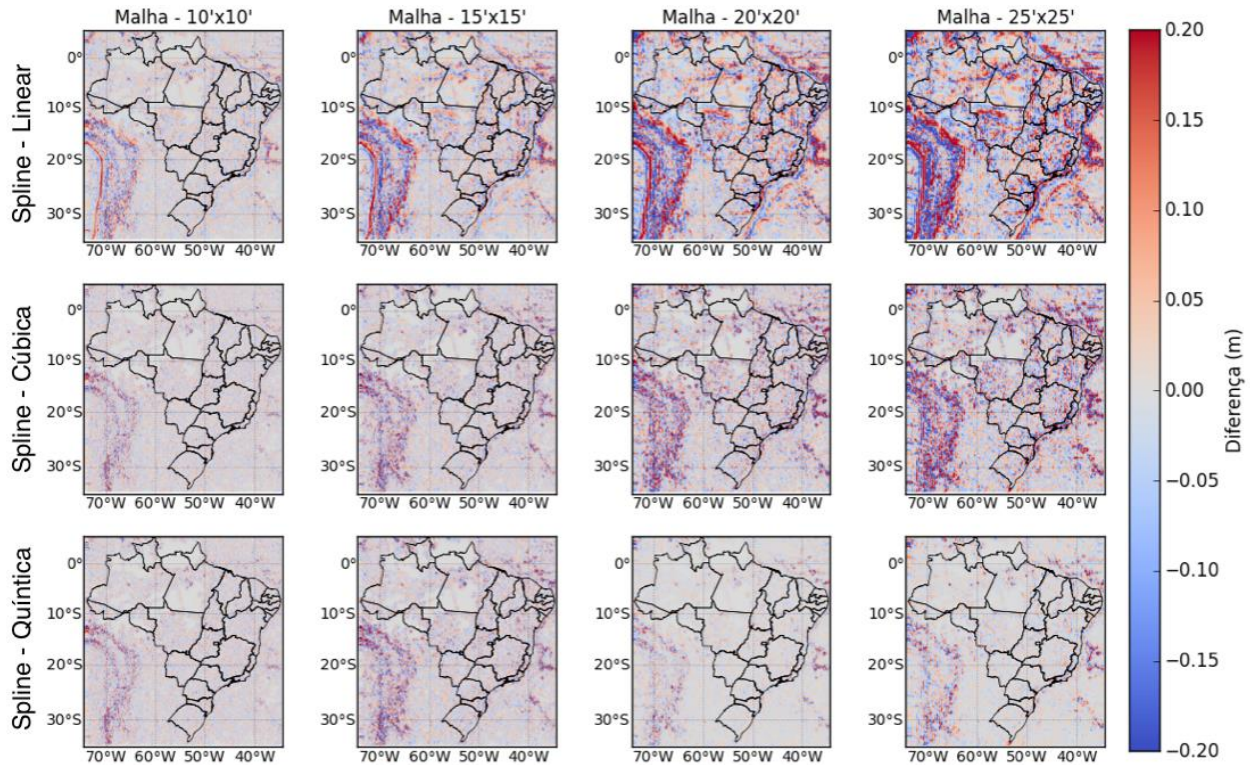


Figura 5 – Diferenças entre os valores interpolados por meio das Splines (Linear, Cúbica e Quíntica) utilizando as reamostragens de 10'x10' à 25'x25' (esquerda para direita) e os pontos de validação do MAPGEO2015 (SIRGAS2000)

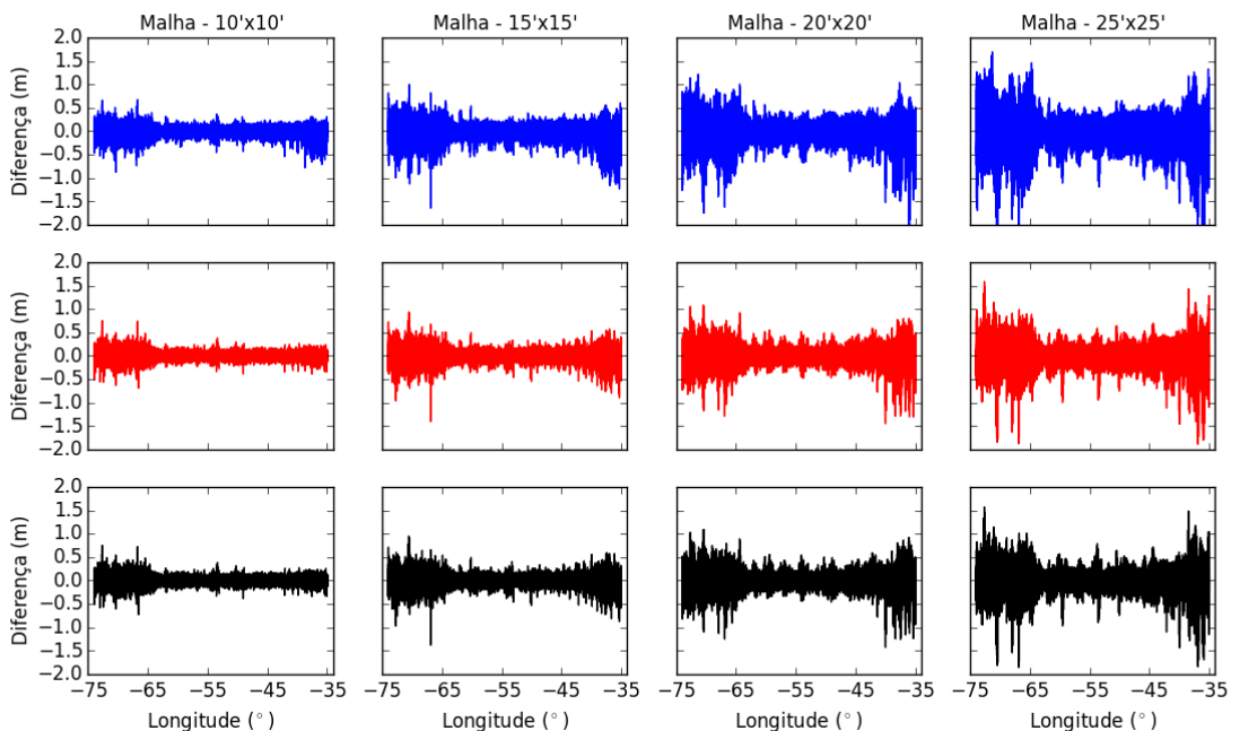


Figura 6 – Diferenças entre os valores interpolados por meio das Splines (Linear, Cúbica e Quíntica) utilizando as reamostragens de 10'x10' à 25'x25' (esquerda para direita) e os pontos de validação do MAPGEO2015 (SIRGAS2000) em função da longitude

As tabelas 1, 2, 3 e 4 mostram as estatísticas referentes as diferenças para cada método de interpolação, respectivamente para as reamostragens da malha regular de 10'x10', 15'x15', 20'x20' e 25'x25'.

Tabela 1 – Estatísticas das diferenças dos pontos de validação para a malha de 10'x10'

	LINEAR	CÚBICA	QUÍNTICA
Média(cm)	0,00	0,02	0,02
SD (cm)	5,77	4,87	4,99
RMSE (cm)	5,77	4,87	4,99
Máx. Abs. (cm)	87,50	74,67	74,14

Tabela 2 – Estatísticas das diferenças dos pontos de validação para a malha de 15'x15'

	LINEAR	CÚBICA	QUÍNTICA
Média(cm)	-0,06	-0,03	-0,03
SD (cm)	8,94	6,54	6,67
RMSE (cm)	8,94	6,54	6,67
Máx. Abs. (cm)	163,89	139,82	137,43

Tabela 3 – Estatísticas das diferenças dos pontos de validação para a malha de 20'x20'

	LINEAR	CÚBICA	QUÍNTICA
Média(cm)	-0,00	0,05	0,05
SD (cm)	12,93	8,88	8,99
RMSE (cm)	12,93	8,88	8,99
Máx. Abs. (cm)	236,50	144,29	142,25

Tabela 4 – Estatísticas das diferenças dos pontos de validação para a malha de 25'x25'

	LINEAR	CÚBICA	QUÍNTICA
Média(cm)	-0,00	0,09	0,09
SD (cm)	17,74	11,68	11,79
RMSE (cm)	17,74	11,68	11,79
Máx. Abs. (cm)	287,72	188,29	185,29

Nessas reamostragens, os métodos Spline Cúbico e Quíntico apresentaram diferenças entre seus RMSE (*Root Mean Square Error*) e SD (*Standard Deviation*) de 0,1 cm, enquanto os valores máximos absolutos (Máx. Abs.) chegaram de 0,5, 2,4, 2,0 e 3,0 cm. Esses valores mostram uma semelhança entre os interpoladores. na adaptação da superfície geoidal.

A Spline Linear mostrou maiores RMSE e Máx. Abs. em relação aos outros interpoladores, respectivamente: 0,9 cm e 12,8 cm para a grade de 10'x10'; 0,24 cm e 24,1 cm para 15'x15'; 0,41cm e 0,92 cm para 20'x20'; e 0,61 cm e 0,994 cm para 25'x25'. Portanto, o interpolador Linear mostrou inferior capacidade de representação dos valores de ondulação geoidal para os pontos de validação.

A Figura 7 mostra os RMSE, em metros, para cada reamostragem, permitindo a conclusão que com a melhora da resolução da malha, isto é, a diminuição do espaçamento da grade, a diferença entre as interpolações é reduzida, confirmando o fato que para curtas distâncias o geoide apresenta uma variação linear.

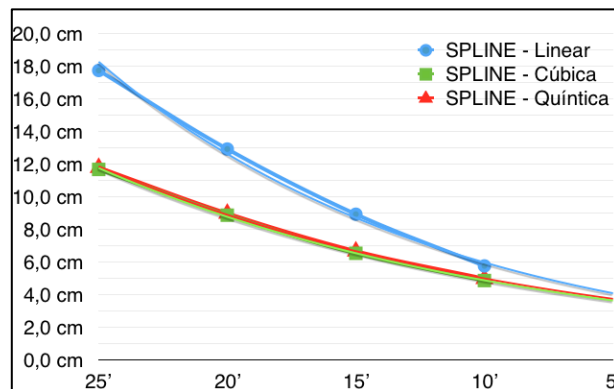


Figura 7 – RMSE dos pontos de validação

Ainda, considerando o comportamento exponencial dos valores obtidos, estima-se que para a grade de 5'x5' do MAPGEO2015 para esses interpoladores os RMSE são de ±4,0 cm. Com um comportamento mais suave das ondulações os interpoladores apresentaram estatísticas menores em relação ao conjunto total de pontos. Novamente, na modelagem das superfícies as Splines Cúbica e Quíntica apresentaram menores RMSE e Máx Abs. Dessa forma, estima-se que esses interpoladores apresentem um RMSE para a grade do MAPGEO2015 dentro do território nacional de ±3,5 cm.

Na busca da estimativa dos erros desses interpoladores para região do Brasil, somente os pontos de validação dentro do território nacional participaram das estatísticas mostradas nas tabelas 5, 6, 7 e 8.

Tabela 5 – Estatísticas das diferenças dos pontos de validação para a malha de 10'x10'

	LINEAR	CÚBICA	QUÍNTICA
Média(cm)	0,02	0,01	0,01
SD (cm)	4,51	4,13	4,23
RMSE (cm)	4,51	4,13	4,23
Máx. Abs. (cm)	45,00	38,53	38,67

Tabela 6 – Estatísticas das diferenças dos pontos de validação para a malha de 15'x15'

	LINEAR	CÚBICA	QUÍNTICA
Média(cm)	-0,00	-0,03	-0,03
SD (cm)	6,35	5,12	5,22
RMSE (cm)	6,35	5,12	5,22
Máx. Abs. (cm)	55,89	54,40	53,17

Tabela 7 – Estatísticas das diferenças dos pontos de validação para a malha de 20'x20'

	LINEAR	CÚBICA	QUÍNTICA
Média(cm)	0,10	0,06	0,05
SD (cm)	8,91	6,64	6,74
RMSE (cm)	8,91	6,64	6,74
Máx. Abs. (cm)	67,75	77,38	78,13

Tabela 8 – Estatísticas das diferenças dos pontos de validação para a malha de 25'x25'

	LINEAR	CÚBICA	QUÍNTICA
Média(cm)	0,08	0,02	0,02
SD (cm)	11,86	8,43	8,46
RMSE (cm)	11,86	8,43	8,46
Máx. Abs. (cm)	118,88	94,13	89,78

Buscando uma comparação entre o interpolador bilinear do programa MAPGEO2015 e os interpoladores Splines (Linear, Cúbico e Quíntico) foi-se realizado uma reamostragem da malha regular para 2,5'x2,5'. Notou-se que ambos apresentam diferenças nulas para os pontos da malha de 5'x5', portanto nas diferenças entre os pontos reamostrados (Figura 8) os pontos da grade inicial não foram utilizados para comparação.

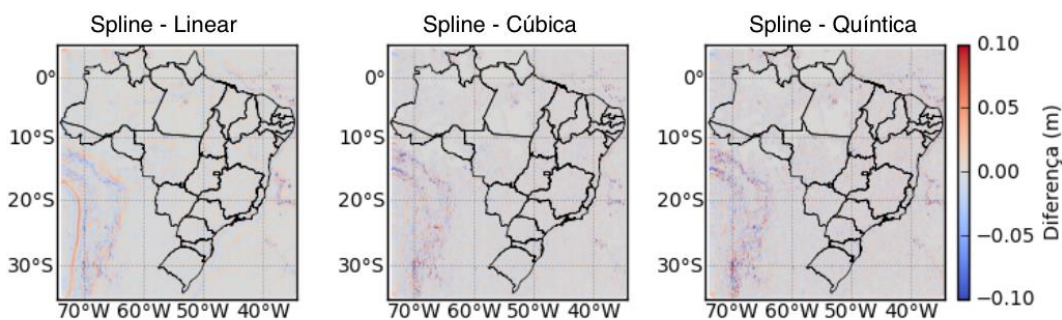


Figura 8 – Diferenças entre os valores interpolados por meio das Splines (Linear, Cúbica e Quíntica) e o programa MAPGEO2015 (SIRGAS2000)

Os RMSD (*Root Mean Square Difference*) entre o programa o MAPGEO2015 e os interpoladores Splines Linear, Cúbico e Quíntico foram respectivamente 1,11, 1,44 e 1,69 cm, enquanto as diferenças máximas obtidas foram 20,43, 36,81 e 39,74 cm. As maiores diferenças

encontram-se novamente nas regiões com maiores variações do modelo geoidal. Para região nacional os RMSD obtidos foram 0,84, 1,20 e 1,42 cm e os valores máximos foram 10,00, 14,69 e 16,24 cm, respectivamente para as Splines Linear, Cúbica e Quíntica.

Esses resultados mostram que o programa MAPGEO2015 apresenta maior semelhança com a Spline Linear, uma vez que as estatísticas foram menores. Para fins didáticos foi-se implementado interpolações bilineares, a partir de então foi constatado que a Spline Linear não apresenta diferenças significativas em relação a interpolação bilinear implementada nesse trabalho, porém essas interpolações apresentaram as mesmas diferenças em relação ao programa MAPGEO2015.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou uma análise entre alguns dos mais comuns interpoladores, com o intuito de avaliar as diferenças quando estes são utilizados para representar uma superfície geoidal a partir da malha regular disponibilizada pelo MAPGEO2015. Foram analisados os interpoladores do programa MAPGEO2015 e interpoladores Spline.

Tradicionalmente, os modelos geoidais são eivados de erros que podem atingir até a escala dos metros para as ondulações geoidais. O MAPGEO2015, por exemplo, foi disponibilizado com um RMSE de 17 cm. Dentre os erros resultantes na validação dos modelos geoidais destacam-se os erros presentes no nivelamento geométrico, no posicionamento com o GNSS, no próprio modelo geoidal e o ruído dos interpoladores. Esse último foi empiricamente calculado para alguns interpoladores a partir da reamostragem da grade regular para 10'x10', 15'x15', 20'x20' e 25'x25'. Com a redução do espaçamento da grade observou-se a diminuição do RMSE dos interpoladores, a partir desse comportamento a estimativa do RMSE da utilização desses interpoladores para uma grade de 5'x5' foi de $\pm 4,0$ cm para toda área de estudo e $\pm 3,5$ cm para região do Brasil.

Vale mencionar que o IBGE informa que o programa MAPGEO2015 realiza uma interpolação bilinear, contudo, apesar de apresentar resultados semelhantes à interpolação bilinear padrão, algumas diferenças foram obtidas, principalmente em regiões de alta variabilidade do geoide (Andes e litoral do Brasil).

REFERÊNCIAS

ANDERSEN, O. B.; KNUDSEN, P.; PHILIPPA, A. M. B. The DNSC08GRA global marine gravity field from double retracked satellite altimetry. **Journal of Geodesy**, v. 84, n. 3, p. 191-199, nov. 2009. ISSN 1432-1394.

BLITZKOW, D.; CINTRA, J.P.; FONSECA JÚNIOR, E.S. **Mapa Geoidal do Brasil: 1992**. IBGE - Diretoria de Geociências. Rio de Janeiro, RJ, p. 4. 1993.

BLITZKOW, D. **Sistemas de altitudes e a determinação do geóide**. Curso proferido no Instituto Oceanográfico da Armada (INOCAR). Quiaquil, Equador: [s.n.]. 2003.

DINIZ, E. A.; SOUZA, G. H. B.; JUNIOR, J. P. M.; DALAQUA, R. R.; PASTORIM, R. V. **Atualização do sistema cadastral da cidade de Ribeirão dos Índios – SP**. Universidade Estadual Paulista – UNESP Faculdade de Ciências e Tecnologia– FCT. [S.l.]: [s.n.]. 2004.

DOURADO, W. B. Avaliação de Técnicas de Interpolação de Imagens Digitais. (Tese doutorado) Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional Universidade Estadual Paulista – FCT, Presidente Prudente (SP) 2014.

GUIMARÃES, G. N.; MATOS, A. C. O. C.; BLITZKOW, D. Gravimetric densification in the State of São Paulo aiming a Geoid Model. **Revista Brasileira de Geofísica**, v. 31, n. 4, p. 631-

642, 2013. ISSN 0102-261X.

IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **O novo modelo de ondulação geoidal do Brasil: MAPGEO2015**. Rio de Janeiro, RJ, nov. 2015. Disponível em: <ftp://geoftp.ibge.gov.br/documentos/geodesia/rel_mapgeo2015.pdf>. Acesso em: 07 dez. 2015.

KUROISHI, Y. Improved geoid model determination for Japan from GRACE and a regional gravity field model. **Earth, Planets and Space**, v. 61, n. 7, p. 807-813, 2009. ISSN 1880-5981.

LOBIANCO, M. C. B.; BLITZKOW, D.; MATOS, A. C. O. C. **O Novo modelo geoidal para o Brasil**. IV Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas. Curitiba, PR: [s.n.]. 2005.

MACHADO, W. C.; BLITZKOW, D.; MATOS, A. C. O. C. **Interpolação de anomalias de gravidade através de Redes Neurais visando o cálculo do modelo geoidal de Santa Catarina**. VIII Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas, Curitiba, 2013.

MARTINEC, Z.; GRAFAREND, E. W. Solution to the Stokes Boundary-value problem on an Ellipsoid of Revolution. **Studia Geophysica et Geodaetica**, v. 41, n. 2, p. 103-129, abr. 1997. ISSN 1573-1626.

MATOS, A. C. O. C.; BLITZKOW, D.; GUIMARÃES, G. N.; LOBIANCO, M. C. B.; COSTA, S. M. A. Validação do MapGeo2010 e comparação com modelos do geopotencial recentes. **Boletim Ciências Geodésicas**, Curitiba, PR, v. 18, n. 1, p. 101-122, mar. 2012.

NAJAFI-ALAMDARI, M.; EMADI, S. R.; MOGHTASED-AZAR, K. The ellipsoidal correction to the Stokes kernel for precise geoid determination. **Journal of Geodesy**, v. 80, n. 12, p. 675-689, 2006. ISSN 1432-1394.

ODERA, P. A.; FUKUDA, Y. Improvement of the geoid model over Japan using integral formulae and combination of GGMs. **Earth, Planets and Space**, v. 66, n. 22, p. 7, dez. 2014. ISSN 1880-5981.

PEDRINI, H.; SCHWARTZ, W. R. *Análise de imagens digitais: Princípios, Algoritmo e Aplicações*. Thomson Learning, São Paulo, 2008.

PLAG, H. P.; PEARLMAN, M. **Global Geodetic Observing System: Meeting the Requirements of a Global Society on a Changing Planet in 2020**. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009. 332 p. ISBN 978-3-642-02687-4.

RUGGIERO, M. A.; LOPES, V. L. R., *Cálculo Numérico – Aspectos Teóricos e Computacionais*, McGraw-Hill, São Paulo, 1988.

SUBBOTIN, Yu. N. Spline interpolation. Encyclopedia of Mathematics. 2011. Disponível em: <http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Spline_interpolation&oldid=11892>. Acesso em: 30 de maio 2016. ISBN 978-1-55608-010-4

WANG, Y. M.; SALEH, J.; LI, X.; ROMAN, D. R. The US Gravimetric Geoid of 2009 (USGG2009) model development and evaluation. **Journal of Geodesy**, v. 86, n. 3, p. 165-180, mar. 2012. ISSN 1432-1394.