

DETERMINAÇÃO E ANÁLISE DAS PRECISÕES DAS COMPONENTES E DO DESVIO DA VERTICAL PELO MÉTODO ASTROGEODÉSICO

VINÍCIUS AMADEU STUANI PEREIRA¹

GABRIEL OLIVEIRA JEREZ¹

PAULO DE OLIVEIRA CAMARGO^{1,2}

Universidade Estadual Paulista – UNESP, Faculdade de Ciências e Tecnologia – FCT, Presidente Prudente/SP

¹ Programa de Pós-Graduação em Ciências Cartográficas, ² Departamento de Cartografia

vi_stuani@hotmail.com, gabrielojerez@gmail.com, paulo@fct.unesp.br

RESUMO – Um programa para a elaboração de listas de estrelas para a determinação astronômica de precisão da latitude (método de Sterneck), longitude (método das distâncias zenitais absolutas) e azimute (método das observações a estrelas em circum-elongação) é apresentado. As aplicações das listas possibilitam a obtenção das coordenadas astronômicas e o azimute para uma determinada direção, bem como, os respectivos desvios-padrões. A partir das coordenadas astronômicas e geodésicas de um ponto, e das respectivas precisões, podem ser obtidas pelo método astrogeodésico as componentes 1° vertical (η) e meridiana (ξ) e o desvio da vertical (i), bem como, os respectivos desvios-padrões por propagação de covariâncias. Nos experimentos realizados verificou-se que, independentemente do método de posicionamento GNSS (*Global Navigation Satellite System*) utilizado, exceto o Posicionamento por Ponto Simples, as precisões das componentes foram similares, devido às precisões das coordenadas astronômicas serem muito inferiores das precisões das geodésicas. Assim, a partir das coordenadas astronômicas determinadas utilizando um teodolito de leitura direta de 1" e das coordenadas geodésicas do posicionamento relativo estático foram obtidas as componentes e o desvio, sendo $\xi = 3,3339 \pm 3,3323''$, $\eta = -54,8849 \pm 4,5255''$ e $i = 54,9861 \pm 4,5217''$ para um pilar de concreto localizado na UNESP de Presidente Prudente/SP.

ABSTRACT – A program for the elaboration of stars lists for precision astronomical determination of latitude (Sterneck method), longitude (absolute zenith distances method) and azimuth (observations of stars in circum elongation method) is presented. The applications of the lists enable to obtain the astronomical coordinates and the azimuth to a certain direction, as well as the respective standard deviations. From the astronomical and geodetic coordinates of a point, and respective standard deviations, it is possible to obtain the first vertical (η) and meridian (ξ) components and the vertical deviation (i) by the astrogeodetic method, and its standard deviations by propagation of covariances. In the experiments realized it was noticed that, independently of the GNSS (*Global Navigation Satellite System*) positioning method applied, except by the Simple Point Positioning, the components's precisions were similar, because of the precisions of the astronomic coordinates that are much lower than the precisions of the geodetics. Thus, from the astronomical coordinates determined using a theodolite with right reading of 1" and the geodetic coordinates from static relative positioning it were obtained the components and the deviation, $\xi = 3,3339 \pm 3,3323''$, $\eta = -54,8849 \pm 4,5255''$ and $i = 54,9861 \pm 4,5217''$ to a concrete pillar located at UNESP in Presidente Prudente/SP.

1 INTRODUÇÃO

Para a determinação das coordenadas de pontos sobre a superfície física da Terra tanto a Topografia, a Astronomia e a Geodésia se utilizam de sistemas de coordenadas cartesianas retangulares e sistemas de coordenadas curvilíneas. No entanto, esses sistemas de coordenadas apresentam diferentes parâmetros de definição (*system*) e realizações (*frame*), como, por exemplo, a orientação de um eixo de um sistema em relação a vertical e outro sistema em relação a normal (ZANETTI et al., 2008).

Com a modernização da tecnologia, principalmente devido ao GNSS (*Global Navigation Satellite System*), a utilização concomitante de diferentes sistemas de coordenadas tornou-se uma prática comum. Devido a isso, a não consideração de reduções apropriadas pertinentes a cada tipo de levantamento proporciona inconsistências nos resultados obtidos (ZANETTI et al., 2008). Um exemplo é a não redução nas medidas angulares do desvio da vertical (i), que consiste no ângulo formado, em um dado ponto, entre a vertical e a normal.

A vertical, determinada pelo vetor da gravidade e materializada pelo fio de prumo, é utilizada como referência física nos instrumentos de medições topográficas, astronômicas e geodésicas. Caso o interesse seja a determinação de coordenadas astronômicas não há problemas de natureza geométrica, pois as mesmas estão relacionadas à vertical. Já os cálculos geodésicos para a determinação de coordenadas geodésicas são efetuados sobre o elipsóide, porém, as observações são executadas com um aparelho que se refere à vertical, que não é normal ao elipsóide.

Dessa forma, a determinação do desvio da vertical torna-se uma atividade necessária para levantamentos de campo, pois permitem, de acordo com Featherstone e Rüeger (2000), a:

- Transformação entre coordenadas astronômicas e geodésicas;
- Transformação de azimutes astronômicos em azimutes geodésicos;
- Redução de direções horizontais e ângulos zenitais medidos ao elipsóide;
- Redução de distâncias inclinadas medidas eletronicamente ao elipsóide, através de ângulos zenitais; e
- Determinação de diferenças de altura a partir de ângulos zenitais e distâncias inclinadas.

A determinação do desvio da vertical é feita através de suas componentes meridiana (ξ) e 1° vertical (η) (GEMAEL, 1999). Quatro métodos para a determinação do desvio podem ser encontrados na literatura: astrogeodésico, gravimétrico, astrogravimétrico e por meio de medidas GPS (*Global Positioning System*) e LPS (*Local Positioning System*), utilizando-se do Problema Procrustes Simples para o cálculo (GRAFAREND; AWANGE, 2000).

O método astrogeodésico consiste basicamente em determinar as componentes do desvio através do conhecimento das coordenadas geodésicas e astronômicas de um ponto. A obtenção das coordenadas geodésicas, por meio do emprego de um dos vários métodos de posicionamento GNSS e de *softwares* comerciais ou científicos, trata-se de uma atividade relativamente simples se comparada aos métodos de determinações astronômicas, as quais necessitam, primeiramente, de ótimas condições climáticas e da elaboração de listas de estrelas para a observação dos astros, bem como, da habilidade do operador para realizar as leituras.

As precisões que as coordenadas geodésicas e astronômicas podem apresentar, e que por sua vez afetam as precisões das componentes do desvio da vertical, estão estritamente relacionadas aos métodos de posicionamento GNSS e aos tipos de determinações astronômicas empregados. Posicionamento por Ponto Preciso (PPP) e posicionamento relativo estático são exemplos de métodos de posicionamento GNSS que fornecem alta precisão nos resultados, assim como a determinação da latitude pelo método de Sterneck, a longitude pelo método das distâncias zenitais absolutas e o azimute por observações à estrelas em circum-elongação no âmbito astronômico.

Assim, o trabalho visa apresentar, primeiramente, o programa computacional LEDAP (Listas de Estrelas para a Determinação Astronômica de Precisão), o qual se utiliza das efemérides astronômicas do Observatório Nacional (ON) para a geração de listas de estrelas para a determinação de precisão da latitude (Sterneck), longitude (distâncias zenitais absolutas) e azimute (estrelas em circum-elongação), bem como, determinar e avaliar as precisões das componentes do desvio da vertical (ξ, η) e do próprio desvio (i) a partir do emprego do método astrogeodésico, sendo as coordenadas geodésicas e as respectivas precisões obtidas por Posicionamento por Ponto Simples (PPS), Preciso (PPP), posicionamento relativo estático e posicionamento relativo estático rápido, e as coordenadas astronômicas e respectivas precisões obtidas a partir da aplicação das listas do LEDAP.

2 DETERMINAÇÕES ASTRONÔMICAS DE PRECISÃO

As determinações astronômicas de precisão asseguram, teoricamente, que as coordenadas astronômicas de um ponto na superfície terrestre (latitude e longitude) são obtidas com um erro médio inferior a $0,3''$, e o azimute astronômico de uma direção com um erro médio inferior a $0,5''$, em valores absolutos (COSTA, 1989). Vários métodos podem ser empregados para a obtenção precisa da latitude, longitude e azimute, sendo destacados o método de Sterneck para a latitude, o método das distâncias zenitais absolutas para a longitude e o método de observações à estrelas em circum-elongação para o caso do azimute (ARANA; PEREIRA, 2016).

2.1 Latitude pelo método de Sterneck

O método de Sterneck consiste basicamente em observar um par de estrelas na passagem meridiana superior, sendo uma estrela ao Norte e outra ao Sul do zênite. Nessas passagens medem-se os ângulos zenitais das estrelas. A Figura 1 apresenta o método, onde E_{Norte} representa a estrela ao Norte do zênite, E_{Sul} a estrela ao Sul do zênite, Z_N o ângulo zenital da estrela ao Norte, Z_S o ângulo da estrela ao Sul, δ_N a declinação da estrela ao Norte, δ_S a declinação da estrela ao Sul, Φ a latitude astronômica do lugar, plano QQ' o Equador celeste e plano $HnHs$ o horizonte astronômico.

O cálculo da latitude é dado pela equação (1), onde z'_N e z'_S são as leituras dos ângulos zenitais observados das estrelas ao Norte e ao Sul do zênite e R_N e R_S as refrações astronômicas das estrelas ao Norte e ao Sul do zênite.

$$\Phi = \frac{\delta_S + \delta_N}{2} + \frac{z'_S - z'_N}{2} + \frac{R_S - R_N}{2} \quad (1)$$

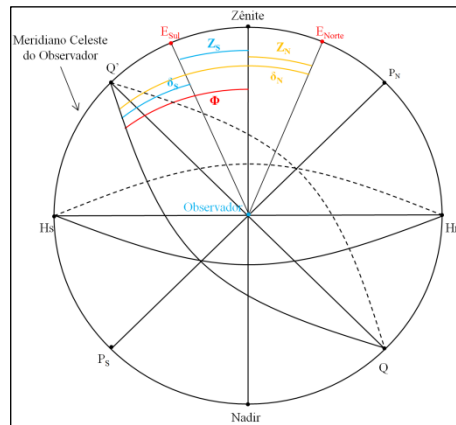


Figura 1 – Determinação da latitude pelo método de Sterneck.

As declinações das estrelas (δ_N, δ_S) devem ser interpoladas para a hora legal (HI) do instante das observações. Para isso utiliza-se a equação (2), sendo as declinações das estrelas obtidas nas efemérides astronômicas disponibilizadas pelo ON.

$$\delta = \delta_0 + (\text{HI} + F) \cdot \Delta\delta_0 \quad (2)$$

onde δ_0 é a declinação da estrela às 0h TU (Tempo Universal), F o fuso horário do local (positivo a oeste do meridiano astronômico de Greenwich) e $\Delta\delta_0$ a variação horária da declinação.

A refração astronômica (R) pode ser calculada com uma boa aproximação a partir da seguinte equação:

$$R = 16,27'' \cdot \text{tg } z' \cdot \frac{P}{273,15^\circ + T} \quad (3)$$

sendo P a pressão atmosférica ambiente em mbar e T a temperatura ambiente e graus centígrados.

Algumas restrições são impostas ao método visando obter resultados de precisão: 1ª – os ângulos zenitais observados devem menores que 45° ($z'_N < 45^\circ$ e $z'_S < 45^\circ$), 2ª – a diferença entre os ângulos zenitais das estrelas de cada par não deve exceder 15° ($|z'_N - z'_S| < 15^\circ$), 3ª – o intervalo de tempo decorrido entre a observação da estrela ao Sul e da estrela ao Norte do zênite não deve exceder 20 minutos ($|\alpha_N - \alpha_S| < 20\text{min}$, onde α é ascensão reta das estrelas, obtidas nas efemérides do ON) e 4ª – deve-se observar 3 grupos de estrelas, sendo cada grupo composto por 4 pares.

Para a elaboração da lista de estrelas devem ser consideradas as restrições impostas ao método. Além disso, é necessário o conhecimento aproximado das coordenadas do local (Φ_0, Λ_0). O procedimento para a elaboração da lista é descrito a seguir:

- Escolhida a hora legal do início das observações (HI_i), calcula-se a hora sidereal correspondente (S_i), dada pela equação (4), onde S_0 é o tempo sidereal médio em Greenwich às 0h TU (fornecido nas efemérides do ON);

$$S_i = S_0 + \Lambda_0 + (\text{HI}_i + F) \cdot 1,00273790926 \quad (4)$$

- Na passagem meridiana as estrelas possuem ângulo horário nulo ($H = 0\text{h}$), o que implica em $S = \alpha$. Assim, de posse do catálogo estelar, escolhem-se as estrelas cuja $\alpha > S_i$;
- Calcula-se a distância zenital aproximada das estrelas (z_0) com a equação (5), utilizando a latitude aproximada do local e a declinação contida no catálogo, sendo que, para respeitar a 1ª restrição devem-se determinar os limites da declinação das estrelas, onde estrelas ao Sul do zênite possuem $(\Phi_0 - 45^\circ) < \delta_S < \Phi_0$, e estrelas ao Norte do zênite $\Phi_0 < \delta_N < (\Phi_0 + 45^\circ)$;

$$z_0 = \pm(\Phi_0 - \delta) \quad (5)$$

- Calculado os limites de declinação, escolhem-se as estrelas que estejam nestes intervalos, bem como, respeitando a 2ª e a 3ª restrições;
- Determina-se a hora legal correspondente a hora sidereal (lembrando que $S = \alpha$) de cada estrela selecionada, através da equação:

$$\text{HI} = \frac{S - S_0 - \Lambda_0}{1,00273790926} - F \quad (6)$$

- Ao final elabora-se uma tabela contendo todas as informações necessárias para realizar e anotar as observações (Tabela 1).

Tabela 1 – Esquema da tabela para a determinação da latitude pelo método de Sterneck.

Est.	Mag.	HI	z ₀	Az.	Par	z'	P	T

2.2 Longitude pelo método das distâncias zenitais absolutas

A longitude de um local consiste na diferença entre a hora sideral local (S) e a hora sideral de Greenwich (S_G):

$$\Lambda = S - S_G \quad (7)$$

A hora sideral local é obtida a partir da Fórmula Fundamental da Astronomia de Posição ($S = H + \alpha$). A determinação do ângulo horário da estrela (H) é realizada a partir da equação (8), onde z é o ângulo zenital da estrela corrigido do erro do ponto zenital (Pz) e da refração astronômica (R), Φ a latitude astronômica precisa do local e δ a declinação interpolada da estrela para o instante da observação.

$$\cos H = \frac{\cos z - \sin \Phi \cdot \sin \delta}{\cos \Phi \cdot \cos \delta} \quad (8)$$

O cálculo do ângulo horário pela equação (8) possui duas raízes: +H para as estrelas a oeste do meridiano local e -H para as estrelas a leste do meridiano local, sendo que neste último caso deve-se somar 360° ou 24h ao valor.

A circunstância favorável à determinação da longitude ocorre na passagem da estrela pelo 1° vertical (azimute astronômico $A_W = 90^\circ$ ou $A_E = 270^\circ$, contado a partir do Sul). Assim, nesta passagem, anotam-se o ângulo zenital observado (z') e os instantes cronométricos (T) em que a estrela cruza os cinco retículos horizontais do teodolito. A temperatura (T) e a pressão (P) são medidas apenas no início e no final das observações, sendo utilizados as médias dos valores. O ângulo zenital corrigido (z) é determinado por:

$$z = z' + Pz + R \quad (9)$$

onde o Pz (não coincidência da vertical do local com a vertical do instrumento) é determinado por meio de leituras do ângulo zenital a um alvo fixo nas posições direta (PD) e inversa (PI) do instrumento (equação (10)), e a refração astronômica pela equação (3).

$$Pz = 180^\circ - \frac{PD + PI}{2} \quad (10)$$

A hora legal (HI) a ser utilizada na interpolação da declinação da estrela (equação (2)) é obtida a partir da média aritmética dos cinco instantes cronométricos.

Uma vez obtido o ângulo horário (H) resta-se calcular o valor da ascensão reta (α) interpolada da estrela e, em seguida, determinar a hora sideral local (S). O procedimento para o cálculo de α é o mesmo realizado para a declinação.

Por fim, a hora sideral de Greenwich (S_G) é dada por:

$$S_G = S_0 + (HI + F) \cdot 1,00273790926 \quad (11)$$

Para a elaboração da lista de estrelas deve ser considerada a condição da passagem pelo 1° vertical ($|\delta| < |\Phi_0|$), sendo que para que o fenômeno seja visível é necessário que Φ_0 e δ tenham o mesmo sinal. Além disso, deve-se conhecer a longitude aproximada do local (Λ_0). O procedimento para a elaboração da lista é descrito a seguir:

- Estabelecida a HI, calcula-se S_i pela equação (4);
- Com auxílio de um catálogo estelar, selecionam as estrelas que atendam $|\delta| < |\Phi_0|$, sendo δ e Φ_0 com o mesmo sinal;
- Calcula-se o ângulo horário das estrelas utilizando a equação (12), onde a raiz positiva (+H) é atribuída às passagens das estrelas a oeste do 1° vertical ($A_W = 90^\circ$) e a raiz negativa (-H) às passagens a leste do 1° vertical ($A_E = 270^\circ$), sendo que neste caso soma-se 360° ou 24h ao valor;

$$\cos H = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \Phi_0} \quad (12)$$

- Obtidos os ângulos horários das estrelas tanto para a passagem a oeste quanto a leste do 1° vertical, determina-se a hora sideral local dessas passagens utilizando a fórmula fundamental $S = H + \alpha$, sendo a ascensão reta contida no catálogo;
- Excluem-se as passagens das estrelas cujas horas siderais sejam inferiores a S_i ;
- Calcula-se a distância zenital aproximada das estrelas (z_0) a partir da equação:

$$\cos z_0 = \frac{\sin \delta}{\sin \Phi_0} \quad (13)$$

- Ordenam-se as estrelas selecionadas pela hora sideral local e calcula-se a hora legal correspondente a partir da equação (6); e
- Ao fim, elabora-se uma tabela contendo todas as informações necessárias para realizar e anotar as observações. A Tabela 2 apresenta o esquema da tabela a ser elaborada.

Tabela 2 – Esquema da tabela para a determinação da longitude pelo método das distâncias zenitais absolutas.

Pressão Inicial: ___ mbar			Temp. Inicial: ___ °C							
Est.	Mag.	Hl	z_0	Az.	z'	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	T ₅
Pressão Final: ___ mbar			Temp. Final: ___ °C							

2.3 Azimute por observações à estrelas em circum-elongação

Na determinação do azimute de uma mira (direção de interesse), o astro porta-se como um alvo no qual se conhece o seu azimute. Assim, a questão consiste no transporte do azimute do astro para a mira. A Figura 2 proporciona a visualização esquemática do azimute do astro (A_A), do azimute da mira (A_M), da leitura do ângulo horizontal do astro (L_A) e da leitura do ângulo horizontal da mira (L_M). A partir da Figura 2 obtém-se o cálculo de A_M (equação (14)).

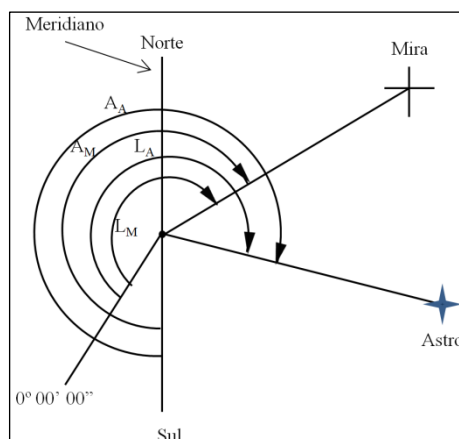


Figura 2 – Azimute da mira.

$$A_M = A_A + L_M - L_A \quad (14)$$

A circunstância favorável para a determinação do azimute astronômico consiste em observar a estrela durante o período próximo a elongação. Utilizando-se da leitura do limbo horizontal do teodolito na posição direta obtêm-se os valores de L_M e L_A , quando se observa a mira e a estrela, respectivamente. Para a determinação de A_A utiliza-se:

$$\operatorname{tg} A_A = \frac{\operatorname{sen} H}{\operatorname{sen} \Phi \cdot \cos H - \operatorname{tg} \delta \cdot \cos \Phi} \quad (15)$$

A equação (15) admite duas raízes: $+A_A$ e $-A_A$. O valor negativo corresponde às observações as estrelas quando as mesmas estão a leste do meridiano local, e o valor positivo é utilizado quando as observações às estrelas dão-se a oeste do meridiano local.

Para o cálculo do azimute astronômico do astro deve-se conhecer a latitude astronômica precisa do ponto, o ângulo horário da estrela e a declinação interpolada para o instante de observação. O ângulo horário é proporcionado através da manipulação da Fórmula Fundamental da Astronomia de Posição ($H = S - \alpha$), sendo a ascensão reta

interpolada e a hora sideral local obtida pela equação (4), onde Λ corresponde a longitude astronômica precisa e HI o instante (T) da observação da estrela. Ressalta-se que neste método não se faz leituras do ângulo zenital.

A elaboração da lista de estrelas deve atender a condição de alongação ($|\delta| > |\Phi_0|$), com Φ_0 e δ possuindo o mesmo sinal. Além disso, deve-se conhecer a longitude aproximada do local (Λ_0). O procedimento para a elaboração da lista é descrito na sequência:

- Estabelecida a HI, calcula-se S_i pela equação (4);
- Com auxílio de um catálogo estelar, selecionam as estrelas que atendam $|\delta| > |\Phi_0|$, sendo δ e Φ_0 com o mesmo sinal;
- Calcula-se o ângulo horário das estrelas utilizando a equação (16), onde a raiz positiva (+H) é atribuída para a alongação a oeste e a raiz negativa (-H) para a alongação a leste do meridiano do local, sendo que neste caso soma-se 360° ou 24h ao valor;

$$\cos H = \frac{\operatorname{tg} \Phi_0}{\operatorname{tg} \delta} \quad (16)$$

- Obtidos os ângulos horários das estrelas tanto para a alongação a oeste quanto a leste, determina-se a hora sideral local desses momentos utilizando a fórmula $S = H + \alpha$, sendo α a ascensão reta contida no catálogo;
- Excluem-se as alongações das estrelas cujas horas siderais sejam inferiores a S_i;
- Calcula-se a distância zenital aproximada das estrelas (z_0) a partir da equação:

$$\cos z_0 = \frac{\operatorname{sen} \Phi_0}{\operatorname{sen} \delta} \quad (17)$$

- Calcula-se o azimute aproximado das estrelas (A_0) pela equação (18), sendo a raiz positiva (+A) atribuída a alongação a oeste e a raiz negativa (-H) a alongação a leste do meridiano do local;

$$\operatorname{sen} A_0 = \frac{\cos \delta}{\cos \Phi_0} \quad (18)$$

- Ordenam-se as estrelas selecionadas pela hora sideral local e calcula-se a hora legal correspondente a partir da equação (6); e
- Ao fim, elabora-se uma tabela contendo todas as informações necessárias para realizar e anotar as observações (Tabela 3).

Tabela 3 – Esquema da tabela para a determinação do azimute por estrelas em circum-elongação.

Est.	Mag.	HI	z_0	A_0	L_M	L_A	T

3 MÉTODOS DE POSICIONAMENTO GNSS

Atualmente diversos métodos de posicionamento GNSS podem ser utilizados. A classificação dos mesmos se dá em relação ao estado do objeto a ter coordenadas definidas, podendo ser estático ou cinemático, em relação ao processamento dos dados, tempo real ou pós-processado, ou ainda em relação à forma de obtenção das coordenadas: posicionamento absoluto, ou por ponto, quando se obtém as coordenadas diretamente em relação ao geocentro, e o posicionamento relativo, quando se definem as coordenadas de um ponto em relação a um referencial materializado (MONICO, 2008; HOFMANN-WELLENHOF et al., 2008). Dentro dessas classificações existem subdivisões, onde o posicionamento por ponto pode ser simples ou preciso, e entre os posicionamentos relativos pode-se realizar o posicionamento estático, estático rápido, semicinemático e cinemático.

Os métodos utilizados nos experimentos para a determinação das coordenadas geodésicas são apresentados de forma sucinta nas próximas seções.

3.1 Posicionamento por Ponto Simples (PPS)

O posicionamento absoluto obtém as coordenadas associadas diretamente ao geocentro, sendo necessário apenas um receptor. No caso do PPS são utilizadas as pseudodistâncias como observáveis, as efemérides transmitidas e a maior parte dos erros a que o sinal GNSS está sujeito são negligenciados ou se utiliza modelagem simples. Como são utilizadas as efemérides transmitidas, as coordenadas são obtidas no sistema de referência do sistema em questão, WGS84 (*World Geodetic System 1984*) para o GPS e PZ90 (*Parametry Zemli 1990*) para o GLONASS (*Globalnaya Navigatsionnaya Sputnikovaya Sistema*), por exemplo.

3.2 Posicionamento por Ponto Preciso (PPP)

O PPP segue basicamente o mesmo conceito do PPS. As diferenças principais são que o PPP se utiliza da fase, ou da fase e da pseudodistância, das duas portadoras. São utilizadas as efemérides precisas, portanto informações precisas de órbita e relógio dos satélites, e, além disso, a maior parte dos erros envolvidos é modelada. Neste caso, como as efemérides utilizadas são as precisas, o referencial associado é o ITRF (*International Terrestrial Reference Frame*) atual, sendo o mais recente o ITRF2008.

3.3 Posicionamento relativo estático

Para a realização do posicionamento relativo estático se faz necessária a utilização de pelo menos dois receptores, que devem coletar simultaneamente dados de pelo menos dois satélites. Um dos receptores é instalado em um ponto de coordenadas conhecidas e o segundo tem suas coordenadas definidas em relação ao primeiro, sendo as coordenadas associadas ao referencial do mesmo. No posicionamento relativo estático em geral se utilizam as duplas diferenças da fase, podendo também ser utilizadas as duplas diferenças da pseudodistância ou mesmo ambas. Neste método o tempo de coleta dos dados pode variar de 20 minutos até algumas horas (MONICO, 2008).

3.4 Posicionamento relativo estático rápido

O posicionamento relativo estático rápido segue basicamente o princípio do estático. A principal diferença é em relação ao tempo de coleta que varia, em geral, de 5 a 20 minutos. Este método é normalmente utilizado em casos em que se precisa de alta produtividade ou agilidade no levantamento, sendo assim um receptor funciona como base e o segundo coleta os dados nos pontos de interesse.

4 PRECISÕES DAS COMPONENTES E DO DESVIO DA VERTICAL

No método astrogeodésico as componentes meridiana (ξ) e 1° vertical (η) do desvio da vertical são determinadas através de coordenadas astronômicas e geodésicas obtidas em um mesmo ponto. De acordo com Gemael (1999) tem-se:

$$\xi = \Phi - \varphi \quad (19)$$

$$\eta = (\Lambda - \lambda) \cdot \cos\varphi \quad (20)$$

onde Φ é a latitude astronômica, φ a latitude geodésica, Λ a longitude astronômica e λ a longitude geodésica. As componentes assim calculadas são válidas para o desvio da vertical definido por Helmert (TORGE, 1991) pelo fato do ponto estar na superfície física da Terra e não exatamente no geóide.

Para obter o desvio da vertical (i) faz-se:

$$i = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \quad (21)$$

A precisão das componentes ξ (σ_ξ) e η (σ_η), bem como as covariâncias ($\sigma_{\xi\eta}$ e $\sigma_{\eta\xi}$), podem ser obtidas a partir da propagação de covariâncias no modelo não linear composto pelas equações (19) e (20). Considerando que coordenadas geodésicas e astronômicas são estatisticamente independentes, tem-se que a Matriz Variância-Covariância (MVC) das componentes do desvio da vertical ($\Sigma_{\xi\eta}$) é dada por:

$$\Sigma_{\xi,\eta} = \begin{bmatrix} \sigma_\xi^2 & \sigma_{\xi\eta} \\ \sigma_{\eta\xi} & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_\Phi^2 + \sigma_\varphi^2 & -\sigma_\varphi^2 \cdot (\lambda - \Lambda) \cdot \sin\varphi \\ -\sigma_\varphi^2 \cdot (\lambda - \Lambda) \cdot \sin\varphi & \sigma_\varphi^2 \cdot (\lambda - \Lambda)^2 \cdot \sin^2\varphi + (\sigma_\lambda^2 + \sigma_\Lambda^2) \cdot \cos^2\varphi \end{bmatrix} \quad (22)$$

sendo σ_Φ^2 , σ_Λ^2 , σ_φ^2 e σ_λ^2 as variâncias das coordenadas astronômicas e geodésicas.

A precisão do desvio da vertical (σ_i) é determinada aplicando, também, a propagação de covariâncias no modelo funcional não linear da equação (21). Ressalta-se que os valores de ξ e η na equação (23) são em módulo.

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{\xi^2 \sigma_\xi^2 + 2\xi\eta\sigma_{\xi\eta} + \eta^2 \sigma_\eta^2}{\xi^2 + \eta^2}} \quad (23)$$

5 PROGRAMA PARA A ELABORAÇÃO DE LISTAS DE ESTRELAS PARA A DETERMINAÇÃO ASTRONÔMICA DE PRECISÃO DE COORDENADAS

O LEDAP, implementado em linguagem C e disponível em <[<http://www.fct.unesp.br/#!/pesquisa/grupos-de-estudo-e-pesquisa/gege/software/>](http://www.fct.unesp.br/#!/pesquisa/grupos-de-estudo-e-pesquisa/gege/software/)>, utiliza-se as efemérides astronômicas do ON para a elaboração de listas de estrelas para a determinação astronômica de precisão da latitude, longitude e azimute pelos métodos de Sterneck, das distâncias zenitais absolutas e observações à estrelas em circum-elongação, respectivamente (Figura 3).

```

#####
# LEDAP #
#####
Elaboracao de (L)istas de (E)strelas para a (D)eterminacao (A)stronomica de (P)recisao da:
-: Latitude (Metodo de Sterneck);
-: Longitude (Metodo das Distancias Zenitais Absolutas)
-: Azimute (Metodo de Observacoes a Estrelas em Circum-Elongacao)
Efemeride Astronomica: Observatorio Nacional (ON)
Desenvolvido por: Uinicius Amedeu Stuanzi Pereira
Engenheiro Cartografo / UNESP - Pres. Prudente
Mestre em Ciencias Cartograficas / UNESP - Pres. Prudente
Doutorando em Ciencias Cartograficas / UNESP - Pres. Prudente
Contato: vi.stuanzi@hotmail.com
Agradecimentos: Programa de Pos-Graduacao em Ciencias Cartograficas (PPGCC)
Coordenacao de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nivel Superior (CNPq)
Observatorio Nacional (ON)

<-> Lista de Estrelas <->

-> Gerar Lista de Estrelas para a Determinacao Astronomica de Precisao do(a):
(1) Latitude (Metodo de Sterneck)
(2) Longitude (Metodo das Distancias Zenitais Absolutas)
(3) Azimute (Metodo de Observacoes a Estrelas em Circum-Elongacao)
Opcao:

```

Figura 3 – Interface inicial do LEDAP.

Os procedimentos para a elaboração das referidas listas são os descritos nas seções 2.1, 2.2 e 2.3. Independente de qual opção escolhida, informações devem ser fornecidas pelo usuário por meio da interface do programa:

- Data de interesse, no formato [DD MM AAAA];
- Hora legal do início das observações, no formato [HH MM];
- Hora legal do término das observações, no formato [HH MM];
- Fuso do local (positivo a oeste do meridiano astronômico de Greenwich), no formato [+/-F];
- Latitude aproximada do local, no formato [+/-GG MM]; e
- Longitude aproximada do local, no formato [+/-GGG MM].

As coordenadas aproximadas do local podem ser obtidas por posicionamento com GNSS ou via Google Earth, por exemplo. Caso não se conheça o fuso horário do local, pode-se acessar o *site* da Divisão Serviço da Hora do ON (<<http://www.horalegalbrasil.mct.on.br/>>) para a obtenção do valor, ressaltando que para alguns estados federativos o fuso é alterado durante a vigência do horário brasileiro de verão.

A partir do programa (LEDAP) o arquivo da lista escolhida é criado no diretório em que encontra o mesmo. Para exemplificação, a Figura 4 apresenta trechos iniciais das três listas elaboradas para o dia 17 de maio de 2016 em Presidente Prudente/SP (-22°07';-51°24').

##### # LEDAP # #####											##### # LEDAP # #####											##### # LEDAP # #####										
Lista de Estrelas - Latitude (Metodo de Sterneck)											Lista de Estrelas - Longitude (Metodo das Distancias Zenitais Absolutas)											Lista de Estrelas - Azimute (Metodo de Observacoes a Estrelas em Circum-Elongacao)										
17/05/2016 - Hora Legal de Inicio: 19h 00min - Lat: -22o 07' Lon: -51o 24'											17/05/2016 - Hora Legal de Inicio: 19h 00min - Lat: -22o 07' Lon: -51o 24'											17/05/2016 - Hora Legal de Inicio: 19h 00min - Lat: -22o 07' Lon: -51o 24'										
Estado do Relógio: _____											Estado do Relógio: _____											Estado do Relógio: _____										
Pressão Inicial: _____ mbar Temperatura Inicial: _____ °C																																
Est.	Mag.	HL	Zo	Az.	Pa	Z'	T1	T2	T3	T4	T5	Est.	Mag.	HL	Zo	Az.	Z'	T1	T2	T3	T4	T5	Est.	Mag.	HL	Zo	Az.	Im	La	La	T	
392	4.3	19h 09min 22s	9o 02' 08"			0	83					1212	4.5	19h 01min 28s	32o 49' 05"			90						574	4.0	19h 00min 42s	65o 44' 08"	334o 21' 52"				
393	4.0	19h 09min 57s	36o 42' 27"			0	84					585	3.5	19h 06min 22s	80o 43' 22"			270						283	2.3	19h 00min 59s	39o 47' 03"	70o 13' 13"				
396	3.8	19h 15min 08s	31o 20' 16"			180	84					1394	4.8	19h 10min 33s	66o 38' 13"			270						506	4.3	19h 02min 11s	46o 27' 17"	295o 18' 49"				
410	3.2	19h 31min 50s	5o 50' 11"			180	85					209	2.8	19h 18min 45s	74o 09' 17"			90						520	2.2	19h 02min 40s	50o 40' 37"	299o 44' 36"				
414	4.6	19h 38min 52s	15o 06' 37"			0	85					1371	4.5	19h 25min 34s	51o 51' 23"			270						537	2.6	19h 04min 26s	55o 55' 55"	306o 56' 21"				
1283	4.1	19h 41min 57s	3o 43' 47"			180	86					266	4.2	19h 29min 30s	56o 17' 30"			90						558	3.4	19h 08min 33s	61o 31' 39"	318o 32' 03"				
415	4.5	19h 42min 17s	20o 11' 53"			0	87																	1373	4.1	19h 08min 36s	52o 15' 38"	301o 40' 23"				

Figura 4 – Trechos das listas elaboradas pelo LEDAP para o dia 17 de maio de 2016 em Presidente Prudente/SP.

6 APLICAÇÃO, RESULTADOS E ANÁLISES

A determinação da latitude astronômica foi realizada no dia 17 de maio de 2016 e a longitude astronômica e azimute astronômico para uma determinada direção no dia 23 de maio de 2016, em um pilar de concreto com dispositivo de centragem forçada localizado no câmpus da UNESP de Presidente Prudente/SP. Um teodolito ZEISS THEO 010A de leitura direta de 1" foi utilizado, bem como os acessórios termômetro, barômetro e cronômetro. As observações obtidas em campo para a latitude, longitude e azimute são apresentadas sucessivamente nas Tabelas 4, 5 e 6. Ressalta-se que apenas 1 grupo de estrelas foi observado para a determinação da latitude, quatro estrelas para a longitude e duas estrelas para o azimute.

Tabela 4 – Observações obtidas para a determinação da latitude pelo método de Sterneck.

Est.	Mag.	HI	z ₀	Az.	Par	z'	P	T
423	3.3	19h 56min 26s	37° 27' 21"	180°	89	37° 27' 57,5"	978,0 mbar	16,0°C
428	4.2	20h 03min 05s	32° 27' 53"	0°	89	32° 27' 59,6"	978,0 mbar	16,0°C
431	4.0	20h 07min 01s	04° 20' 31"	180°	92	04° 21' 06,0"	978,3 mbar	16,0°C
439	4.8	20h 22min 18s	12° 43' 10"	0°	92	12° 42' 53,0"	978,6 mbar	15,0°C
442	3.7	20h 27min 39s	44° 42' 13"	0°	94	44° 41' 19,5"	979,0 mbar	15,0°C
1304	4.4	20h 30min 05s	42° 14' 38"	180°	94	42° 14' 25,6"	979,0 mbar	15,8°C
1311	4.5	20h 42min 55s	28° 38' 20"	180°	97	28° 38' 10,3"	979,0 mbar	15,7°C
455	3.0	21h 01min 08s	36° 43' 26"	0°	97	36° 42' 37,7"	979,0 mbar	15,0°C

Tabela 5 – Observações obtidas para a determinação da longitude pelo método das distâncias zenitais absolutas.

Pres. Inicial: 986 mbar			Temp. Inicial: 10°C							
Est	Mag	HI _{hh:mm:ss}	z ₀	Az.	z'	T ₁ _{hh:mm:ss}	T ₂	T ₃	T ₄	T ₅
548	2.8	20:10:35	42° 31' 27"	270°	42° 25' 39,9"	20:10:27	20:10:45	20:11:02	20:11:18	20:11:36
293	4.0	20:21:22	63° 44' 04"	90°	63° 43' 06,2"	20:21:03	20:21:18	20:21:33	20:21:48	20:22:03
577	4.0	20:36:50	47° 07' 19"	270°	47° 07' 14,5"	20:36:16	20:36:34	20:36:51	20:37:08	20:37:25
622	2.6	20:45:17	60° 45' 13"	270°	60° 35' 32,2"	20:45:21	20:45:39	20:45:56	20:46:13	20:46:30
Pres. Final: 987,5 mbar			Temp. Final: 9°C							

Tabela 6 – Observações obtidas para a determinação do azimute por estrelas em circum-elongação.

Est.	Mag.	HI	z ₀	A ₀	L _M	L _A	T
309	1.8	21h 03min 39s	59° 13' 49"	46° 57' 23"	254° 43' 05"	46° 56' 46,5"	21h 03min 24s
651	3.0	21h 14min 37s	60° 30' 32"	315° 56' 09"	254° 43' 06"	315° 55' 40,7"	21h 16min 03s

Realizado os cálculos apresentados nas seções 2.1, 2.2 e 2.3 foram determinados quatro valores para a latitude (cada par proporciona um valor), quatro para a longitude e dois para o azimute. Com esses valores obtiveram-se as médias e as estimativas dos desvios-padrões. Em relação à determinação das coordenadas geodésicas foi utilizado um receptor Topcon Hiper GGD de dupla frequência para a coleta de dados GNSS, realizada no dia 16 de maio de 2016. As coordenadas pelo PPS foram obtidas a partir do *software online* PPS On-line (<<http://www.fct.unesp.br/#!/pesquisa/grupos-de-estudo-e-pesquisa/gege/pps-on-line/pps-on-line/>>) e pelo PPP no *software online* CSRS-PPP (<<https://webapp.geod.nrcan.gc.ca/geod/tools-outils/ppp.php?locale=en>>). Já os posicionamentos relativos estático e estático rápido foram realizados no *software* TBC (*Trimble Business Center*). As coordenadas astronômicas e geodésicas do pilar, e as respectivas precisões, são apresentadas na Tabela 7.

Tabela 7 – Coordenadas astronômicas e geodésicas e desvios-padrões do pilar de concreto localizado no câmpus da UNESP de Presidente Prudente/SP.

Astronômicas	Φ	σ_{Φ}	Λ	σ_{Λ}	A	σ_A
-	-22° 07' 18,0957"	3,3323"	-51° 25' 26,5818"	4,8851"	254° 43' 43,4613"	13,1684"
Geodésicas	φ	σ_{φ}	λ	σ_{λ}		
PPS	-22° 07' 21,3427"	0,0522"	-51° 24' 27,2465"	0,0706"		
PPP	-22° 07' 21,4288"	0,0009"	-51° 24' 27,3362"	0,0015"		
Estático	-22° 07' 21,4296"	0,0002"	-51° 24' 27,3352"	0,0002"		
Estático Rápido	-22° 07' 21,4295"	0,0002"	-51° 24' 27,3353"	0,0002"		

A determinação astronômica de precisão utilizando um teodolito de leitura direta de 1" proporcionou um desvio-padrão de 3,3323" em latitude, 4,8851" em longitude e 13,1684" no azimute. Em relação aos desvios-padrões das coordenadas geodésicas destacam-se a baixa precisão proveniente do PPS (0,0522") em comparação aos demais métodos de posicionamento.

As componentes do desvio da vertical (ξ, η) e o próprio desvio (i) foram obtidos a partir das equações (19), (20) e (21), bem como, os respectivos desvios-padrões pelas equações (22) e (23). Os resultados são apresentados na Tabela 8. Destaca-se que foram determinadas as componentes e o desvio utilizando cada uma das coordenadas geodésicas provenientes dos métodos supracitados.

Tabela 8 – Componentes, desvio da vertical e respectivos desvios-padrões obtidos a partir do uso de coordenadas geodésicas provenientes de diferentes métodos de posicionamento GNSS.

Método	ξ	σ_{ξ}	η	σ_{η}	i	σ_i
PPS	3,2470"	3,3327"	-54,9670"	4,6738"	55,0628"	4,6706"
PPP	3,3331"	3,3323"	-54,8839"	4,5255"	54,9850"	4,5217"
Estático	3,3339"	3,3323"	-54,8849"	4,5255"	54,9861"	4,5217"
Estático Rápido	3,3338"	3,3323"	-54,8848"	4,5255"	54,9860"	4,5217"

A partir das precisões das componentes do desvio da vertical obtidas (Tabela 8) nota-se que, independentemente do método de posicionamento GNSS empregado para a determinação das coordenadas geodésicas, a magnitude do erro na componente meridiana e na componente 1° vertical é estritamente relacionada às precisões das coordenadas astronômicas, haja vista que o posicionamento GNSS proporciona resultados mais precisos que o astronômico. Salienta-se que as precisões de ξ e η utilizando-se as coordenadas geodésicas do PPS foram piores que dos demais métodos, podendo recomendar o não uso deste método para a determinação do desvio da vertical. As mesmas análises das componentes podem ser aplicadas ao desvio da vertical e a sua precisão.

7 CONCLUSÕES

O programa computacional LEDAP foi desenvolvido para fins de elaboração de listas de estrelas para a determinação astronômica de precisão da latitude pelo método de Sterneck, da longitude pelo método das distâncias zenitais absolutas e do azimute pelo método de observações a estrelas em circum-elongação.

É apresentada a propagação de covariâncias nos modelos funcionais das componentes meridiana e 1° vertical e do próprio desvio da vertical, com o intuito de obter as precisões desses elementos.

A partir da aplicação das listas de estrelas e de diferentes métodos de posicionamento GNSS foram obtidas as coordenadas astronômicas e geodésicas, e as respectivas precisões, de um pilar de concreto localizado no câmpus da UNESP de Presidente Prudente/SP. Pelo método astrogeodésico as componentes meridiana e 1° vertical e o desvio da vertical foram determinados, e a partir da propagação de covariâncias as precisões. As magnitudes das precisões das componentes evidenciam que as mesmas são extremamente relacionadas à magnitude da precisão das coordenadas astronômicas, podendo-se concluir que não difere a escolha do método de posicionamento GNSS a ser aplicado para obter as coordenadas geodésicas, com exceção do PPS.

Assim, utilizando um teodolito de leitura direta de $1''$ e as coordenadas geodésicas do posicionamento relativo estático foram obtidos $\xi = 3,3339 \pm 3,3323''$, $\eta = -54,8849 \pm 4,5255''$ e $i = 54,9861 \pm 4,5217''$ para um pilar de concreto localizado na UNESP de Presidente Prudente/SP.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a CAPES pelo apoio financeiro por meio das bolsas de doutorado e mestrado, ao CNPq (processos 479965/2013-7 e 309924/2013-8) pelo auxílio à pesquisa e bolsa PQ, e ao Observatório Nacional pelo fornecimento das efemérides astronômicas.

REFERÊNCIAS

- ARANA, J. M.; PEREIRA, V. A. S. **Astronomia de Posição – Geodésia II**. Disponível em: <<http://www2.fct.unesp.br/docentes/carto/arana/>>. Acesso: 2 fevereiro 2016.
- COSTA, S. M. A. **Projeto Pró-Astro**. 1989. 187f. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba.
- FEATHERSTONE, W. E.; RÜEGGER, J. M. The importance of using deviations of the vertical for the reduction of survey data to a geocentric datum. **The Australian Surveyor**, v.45, n.2, p.46-61, 2000.
- GEMAEL, C. **Geodésia Física**. 1. Ed. Curitiba: Editora UFPR, 1999.
- GRAFAREND, E. W.; AWANGE, J. L. Determination of vertical deflections by GPS/LPS measurements. **ZfV**, v.8, p.279-288. 2000.
- HOFMANN-WELLENHOF, B.; LICHTENEGGER, H.; WASLE, E. **GNSS – Global Navigation Satellite Systems GPS, GLONASS, Galileo, and more**. New York: Springer-Verlag, 2008. 516p.
- MONICO, J. F. G.. **Posicionamento pelo GNSS: Fundamentos, Definição e Aplicação**. 2 ed. São Paulo: Editora UNESP, 2008. 476p.
- TORGE, W. **Geodesy**. 2a Ed. Berlin: de Gruyter, 1991.
- ZANETTI, M. A. Z.; DE FREITAS, S. R. C.; VEIGA, L. A. K. Determinação do desvio da vertical. **Revista Brasileira de Cartografia**, n.60/4, p.319-329, 2008.