
ESTUDOS PRELIMINARES PARA ESTIMATIVA DA PRECISÃO RELATIVA DO MODELO DE ONDULAÇÃO GEOIDAL DO BRASIL – MAPGEO2015

ADOLFO LINO DE ARAÚJO¹
ROVANE MARCOS DE FRANÇA¹
FLAVIO BOSCATTO¹
IVANDRO KLEIN¹
FRANCISCO HENRIQUE DE OLIVEIRA²

¹ Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Santa Catarina - IFSC
Departamento Acadêmico de Construção Civil - DACC
Curso Técnico de Agrimensura, Florianópolis, SC

² Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC
Centro de Ciências Humanas e da Educação - FAED
Laboratório de Geoprocessamento - GeoLab, Florianópolis, SC

adolfo.lino@ifsc.edu.br, rovane@ifsc.edu.br, flavio.boscatto@ifsc.edu.br, ivandro.klein@ifsc.edu.br,
chico.udesc@gmail.com

RESUMO – A ausência da divulgação da precisão relativa do modelo de ondulação geoidal do Brasil – MAPGEO2015 – tem inviabilizado a aplicação de um dos métodos de conversão de altitudes – método relativo – e limitado as opções técnicas para a realização de tal atividade. Este estudo preliminar apresenta uma metodologia simplificada para uma estimativa conservadora, porém mais aproximada, da precisão relativa do MAPGEO2015 como forma de contribuir com as discussões sobre o geóide no meio científico e profissional. Apresenta ainda os resultados como alternativa à utilização dos atuais valores de modelos anteriores e atualmente defasados.

ABSTRACT – The lack of publication of the relative precision of the Brazil geoidal undulation model – MAPGEO2015 – has made impossible the application of one of the height conversion methods – relative method – and limited technical options for conducting such activity. This preliminary study presents a simplified methodology for a conservative estimate, but nearest, of the relative precision of MAPGEO2015 as a contribution to discussions about geoid in scientific and professional environment. It also presents the results as an alternative to using the values of previous models and current outdated.

1 INTRODUÇÃO

A conversão de altitudes é uma atividade comum e necessária a uma infinidade de aplicações e trabalhos topográficos e geodésicos. Dado o avanço da tecnologia de posicionamento por satélite, o desenvolvimento de equipamentos cada vez mais sofisticados – porém mais acessíveis ao longo dos anos, sua facilidade de operação e as melhorias nos algoritmos de processamento, a determinação de coordenadas – em especial da altitude geométrica – por essa técnica tem se tornado popular no meio técnico ao ponto de para uma gama de profissionais da topografia e da geodésia ser essa a principal ferramenta de trabalho em campo. A modernização do sistema altimétrico de alguns países como o Canadá, inclusive, descarta o uso da rede altimétrica de primeira ordem (nivelamento geométrico), visando maior integração do sistema altimétrico com os métodos de posicionamento por satélite, conforme apresentado e discutido em Santos (2015).

Fornecendo coordenadas sobre uma superfície de referência geometricamente regular e simples (o elipsoide), os receptores GNSS disseminaram a aquisição da altitude geométrica (h) e tornaram a sua determinação muito menos custosa em comparação com a altitude ortométrica (H), tomada sobre uma superfície geométrica e matematicamente

mais complexa (o geóide) calculada normalmente a partir de referências de nível (RRNN) com o uso de métodos de nivelamento geométrico ou trigonométrico (Figura 1).

Com técnicas cada vez mais rápidas e precisas o posicionamento por satélites permite a obtenção da altitude geométrica, inclusive em tempo real, o que já não acontece de forma tão imediata em relação à altitude ortométrica. Este fato ocorre devido à necessidade de se realizar para a obtenção da altitude ortométrica procedimentos de observação de dados em campo com o auxílio de instrumentos topográficos e de processamento, cálculo e ajuste com realização de controles de qualidade por duplo nivelamento em intervalos curtos – o que torna o nivelamento um método custoso e menos produtivo em relação ao posicionamento por satélite quando ambos os métodos podem ser utilizados e quando as precisões exigidas no trabalho assim o permitem. Além do mencionado anteriormente, para a determinação da altitude ortométrica de fato, deve-se coletar observações de desnível e integrar com observações gravimétricas, devido às irregularidades do geóide ao longo da superfície terrestre, como ilustrado na Figura 1, o que torna ainda mais custoso e diminui ainda mais a produtividade em relação à obtenção da altitude geométrica via GNSS.

De toda forma, o uso da altitude ortométrica não está dispensado – sendo mesmo exigido em muitos trabalhos – e a facilidade de aquisição da altitude geométrica impõe uma nova etapa de trabalho, pós-aquisição, que consiste na conversão desta para aquela.

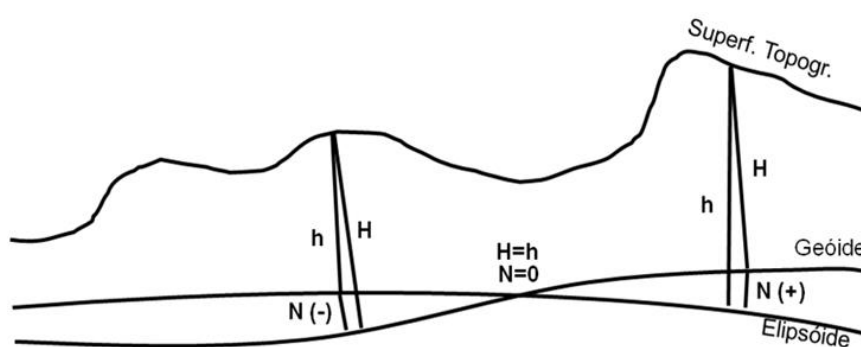


Figura 1 – Altitudes geométrica (h), ortométrica (H) e ondulação geoidal (N). Adaptado de: França *et al.*, 2016.

A conversão de altitudes obedece à seguinte formulação:

$$h \cong H + N \quad (1)$$

Sendo N a ondulação geoidal ou altura geoidal.

A aproximação apresentada em (1) ocorre devido ao fato de que cada altitude é medida segundo uma direção própria. A geométrica é calculada do ponto na superfície topográfica ao longo da normal até a superfície do elipsóide, enquanto a ortométrica é determinada do ponto topográfico ao longo da vertical até a superfície do geóide. A diferença entre estas duas direções é chamada desvio da vertical. Para fins práticos na grande maioria dos trabalhos topográficos e mesmo geodésicos, entretanto, tal aproximação pode ser descartada e a formulação apresentada em (1) fica apresentada assim:

$$h = H + N \quad \text{ou} \quad H = h - N \quad (2)$$

O problema da conversão de altitudes consiste, então, na determinação da ondulação geoidal, o que pode ser feito a partir do modelo de ondulação geoidal do Brasil, intitulado MAPGEO2015, elaborado e publicado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE, 2015). A utilização das ondulações geoidais fornecidas pelo MAPGEO2015 na formulação (2) é realizada por dois métodos diferentes, um chamado absoluto e outro relativo, ambos relacionados à precisão do modelo.

1.1 A precisão do MAPGEO2015

A elaboração do MAPGEO2015 (Figura 2) demorou cinco anos – contados a partir do modelo anterior publicado no ano de 2010 – e envolveu intensivos estudos do campo de gravidade no território nacional e também em países vizinhos, como Argentina, Equador, Paraguai e Venezuela. De acordo com os resultados publicados em IBGE (2015), somente no Brasil foram utilizadas observações de aproximadamente 45.000 pontos gravimétricos, sendo mais de

18.000 destes implantados nos últimos cinco anos. Também foram melhoradas as técnicas de processamento destas observações, o que garantiu uma melhora significativa na precisão do modelo.

O processo de validação do MAPGEO2015 utilizou como referência as ondulações geoidais obtidas diretamente pela aplicação da formulação (2) sobre pontos das redes planimétrica e altimétrica do Sistema Geodésico Brasileiro. Tais pontos (estações geodésicas) corresponderam a um total de 592 ao longo de todo o território nacional os quais pertencem simultaneamente às duas redes (sendo dos tipos SAT e RN) e, portanto, tinham conhecidas as altitudes geométrica e ortométrica. Tais ondulações geoidais reais (N) foram comparadas às ondulações geoidais geradas pelo MAPGEO2015 (n) o que permitiu ser divulgada a precisão¹ de $\pm 0,17\text{m}$ ou $\pm 170\text{mm}$, chamada absoluta (Figura 3).

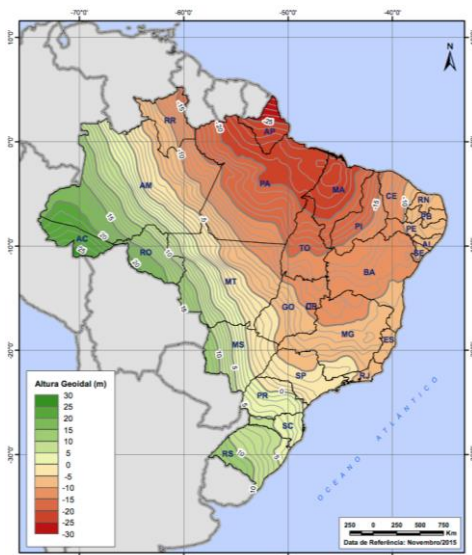


Figura 2 – Modelo de ondulação geoidal do Brasil. Adaptado de: IBGE, 2015.



Figura 3 – Mapa das discrepâncias entre a ondulação geoidal real e a fornecida pelo MAPGEO2015. Adaptado de: IBGE, 2015.

O número acima indica que todos os valores fornecidos pelo modelo estarão contidos num intervalo de até três vezes o mesmo quando comparados com os das ondulações geoidais reais obtidas diretamente. Conforme a publicação de IBGE (2015), as maiores discrepâncias encontradas foram de 0,49m e -0,49m, compreendidas, portanto, no intervalo supracitado.

Embora a rede altimétrica de primeira ordem do Brasil esteja mais próxima das altitudes normais, vinculadas ao quase-geóide, do que das altitudes ortométricas, vinculadas ao geóide (ver, por exemplo, Severo *et al.*, 2013), neste

¹ O documento do IBGE apresenta a nomenclatura RMS (*Root Mean Square*) como sinônimo para precisão do modelo.

trabalho, assume-se os valores das altitudes das RRNN como valores de referência para obtenção das ondulações geoidais, e consequentemente, das altitudes ortométricas, em conformidade com os resultados apresentados pelo IBGE.

A divulgação do MAPGEO2015, entretanto, não apresentou a parte relativa da precisão, fato que já havia ocorrido na divulgação do modelo anterior MAPGEO2010, quando foi apresentada também apenas a precisão absoluta com valor de $\pm 320\text{mm}$. O último modelo que apresentou a precisão com parte absoluta e parte relativa foi o MAPGEO2004, cujos valores eram de $\pm 400\text{mm}$ e $\pm 10\text{mm/km}$, respectivamente.

A ausência do valor relativo deixa uma lacuna na aplicação de um dos métodos de conversão de altitude, chamado método relativo, e condiciona os usuários a continuarem utilizando o valor do MAPGEO2004 de $\pm 10\text{mm/km}$ como única alternativa, quando certamente este valor é bem menor na atualidade, haja visto a melhoria que houve na parte absoluta da precisão do modelo no intervalo de onze anos, passando de $\pm 1000\text{mm}$ para $\pm 170\text{mm}$. A continuidade da utilização do valor relativo defasado promove a obtenção de resultados conservadores em relação à precisão da ondulação geoidal, o que poderia ser sanado com a divulgação da parte relativa do novo modelo.

Dentro deste contexto, este trabalho se propõe a realizar um estudo preliminar com a finalidade de obter uma estimativa para a precisão relativa do modelo de ondulações geoidais MAPGEO2015.

1.2 Métodos para conversão de altitudes

França *et al.* (2016) apresenta os dois métodos para a conversão de altitudes geométricas em ortométrica: o método absoluto e o método relativo.

Conforme o autor citado, no método absoluto a ondulação geoidal obtida diretamente no MAPGEO2015 é substituída na formulação (2) promovendo, dessa forma, a conversão entre as altitudes. Com a aplicação deste método a conversão é realizada de forma isolada para um determinado ponto e a precisão do resultado da altitude ortométrica precisa levar em consideração a precisão absoluta do modelo.

Conforme Gemael (1994), o cálculo da precisão do resultado deve ser realizado através da lei de propagação de erros, sendo que uma das partes será a precisão da altitude geométrica obtida a partir do rastreamento GNSS sobre o ponto de interesse e a outra será a precisão absoluta do modelo ($\sigma_N = \pm 170\text{mm}$ no MAPGEO2015). O resultado em mm da precisão da conversão de altitude geométrica em ortométrica de um ponto P pelo método absoluto será obtido da seguinte forma:

$$\sigma_{HP} = \pm \sqrt{\sigma_{hP}^2 + \sigma_N^2} \quad (3)$$

No método relativo de conversão de altitudes, diferentemente do absoluto, deve-se ter sido realizado o rastreamento GNSS sobre uma referência de nível (RN), ou nivelado um marco que foi implantado a partir de posicionamento por satélite.

A ondulação geoidal dessa RN servirá como referência para a determinação da ondulação geoidal num ponto qualquer P, sendo calculada a variação da ondulação geoidal a partir dos valores obtidos no MAPGEO2015 para a RN e para o ponto P. Para aplicação do método relativo, deve-se considerar que o modelo geoidal é paralelo ao geóide real. Tal consideração é válida quando a distância entre os pontos tende a zero. Na medida em que o ponto P se afasta da RN, essa consideração torna-se menos realista e, portanto, necessita-se estimar qual a precisão do resultado, que será inversamente proporcional à distância entre os pontos. Ou seja, quanto mais distante da RN, maior a degradação da precisão do resultado da ondulação geoidal do ponto P pela utilização do modelo geoidal; o que ficava claramente demonstrado no MAPGEO2004 na razão de 10mm a cada km, e aponta para a necessidade de se estimar a precisão relativa do MAPGEO2015.

A aplicação do método relativo segue um processo de cálculo que envolve seis etapas, descritas nas formulações de (4) a (9).

Na primeira calcula-se a ondulação geoidal real da RN:

$$N_{RN} = h_{RN} - H_{RN} \quad (4)$$

Em seguida, calcula-se a variação da ondulação geoidal entre a RN e o ponto P utilizando os valores obtidos no MAPGEO2015:

$$\Delta_n = n_P - n_{RN} \quad (5)$$

Com a consideração de que o geóide do modelo é paralelo ao geóide real, pode-se dizer que:

$$\Delta_N = \Delta_n \quad (6)$$

E, portanto:

$$N_P = N_{RN} + \Delta_N \quad (7)$$

Com o valor calculado da ondulação geoidal real do ponto P, pode-se obter a altitude ortométrica do ponto P, repetindo a formulação (2):

$$H_P = h_P - N_P \quad (8)$$

Já Wellenhof (2005) apresenta a equação de forma unificada:

$$H_P = h_P + H_{RN} - h_{RN} - N_P - N_{RN} \quad (9)$$

A precisão da conversão da altitude geométrica em ortométrica pelo método relativo deve ser calculada pela lei de propagação de erros. De forma análoga ao método absoluto, pode-se obter o resultado da precisão no método relativo a partir da seguinte formulação:

$$\sigma_{HP} = \pm \sqrt{\sigma_{h_P}^2 + \sigma_{h_{RN}}^2 + \sigma_{H_{RN}}^2 + \sigma_N^2} \quad (10)$$

O problema consiste, portanto, em saber quanto vale a σ_N relativa, já que a mesma não foi divulgada para o MAPGEO2015, de forma a poder aplicar o método relativo de conversão de altitudes com melhor precisão, com resultado mais realista e sem a necessidade de recorrer ao valor defasado do modelo de 2004.

2 METODOLOGIA

A fim de equacionar o problema apresentado, propõe-se uma metodologia para estimar a precisão relativa do modelo geoidal brasileiro através da análise do mapa de discrepâncias entre as ondulações geoidais do MAPGEO2015 e as obtidas nos pontos de conexão das redes planimétrica e altimétrica. Tal mapa foi apresentado por IBGE (2015) como um dos principais resultados da validação do próprio modelo, e de onde derivou-se o valor da precisão absoluta.

Da análise do mapa, foi possível identificar quais áreas apresentavam pontos próximos com grande discrepâncias em valores positivos e negativos. Tal observação é fundamental na metodologia proposta para a estimativa, pois caracteriza regiões no território brasileiro nas quais o modelo sofreu forte variação em relação ao geóide real numa distância curta, podendo dar uma indicação da pior situação na qual relativamente tem-se menor confiança para o uso dos valores de ondulação geoidal a partir do modelo. Em outras palavras, a identificação de forte variação no modelo geoidal indicará onde ocorre a pior depreciação da precisão relativa.

Conforme a legenda do mapa apresentado na Figura 3, quanto mais verde mais a discrepância tende aos valores máximos negativos (até -0,50m) e quanto mais laranja mais tende aos valores máximos positivos (até 0,50m). Entre as regiões selecionadas, uma se destacou na confluência entre os estados do Pará, Tocantins e Maranhão, apresentando exatamente as características procuradas: forte variação da ondulação geoidal (modelo x real) e curta distância (Figura 4).

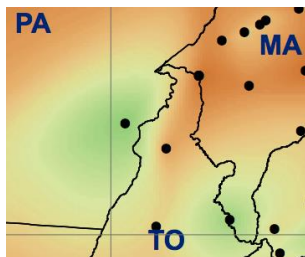


Figura 4 – Região selecionada na confluência entre Pará, Tocantins e Maranhão.

O passo seguinte à escolha da região consistiu na busca no site do IBGE, dentro do Banco de Dados Geodésicos (Figura 5), a fim de descobrir quais estações SAT e RN correspondiam aos pontos selecionados. Foram identificados os SAT 90448 no Pará, 92828 no Tocantins e 92166 no Maranhão. Observou-se que as variações mais fortes ocorriam no sentido dos alinhamentos 90448-92166 e 90448-92166.



Figura 5 – Consulta no banco de dados geodésicos do IBGE.

IBGE		Relatório de Estação Geodésica	
Estação :	90448	Nome da Estação :	PA-124
Município :	SAPUCAIA		
Última Visita :	08/06/2009	Situação Marco Principal :	Bom
Conexões :	RN : 984C		
DADOS PLANIALTIMÉTRICOS		DADOS ALTIMÉTRICOS	
Latitude	06° 50' 07,1906" S	Altitude Ortométrica(m)	221,8345
Longitude	49° 34' 58,3457" W	Fonte	Nivelamento Geométrico
Altitude Geométrica(m)	200,259	Sigma Altitude(m)	0,10
Fonte	GPS Geodésico	Datum	Imbituba
Origem	Ajustada	Data Medição	07/04/1979
Datum	SIRGAS2000	Data Cálculo	15/06/2011
Data Medição	08/06/2009		
Data Cálculo	02/10/2009		
Sigma Latitude(m)	0,002		
Sigma Longitude(m)	0,003		
Sigma Altitude Geométrica(m)	0,013		
UTM(N)	9.244.224,173		
UTM(E)	656.592,891		
MC	-51		

Figura 6 – Relatório da estação 90448.

IBGE		Relatório de Estação Geodésica	
Estação :	92166	Nome da Estação :	92166
Município :	IMPERATRIZ		
Última Visita :	16/10/2009	Situação Marco Principal :	Bom
Conexões :	EP : 10290 EG : 8092988 RN : 2729X		
DADOS PLANIALTIMÉTRICOS		DADOS ALTIMÉTRICOS	
Latitude	05° 28' 28,5156" S	Altitude Ortométrica(m)	185,7326
Longitude	47° 29' 04,4383" W	Fonte	Nivelamento Geométrico
Altitude Geométrica(m)	160,628	Sigma Altitude(m)	0,09
Fonte	GPS Geodésico	Datum	Imbituba
Origem	Ajustada	Data Medição	02/06/1995
Datum	SIRGAS2000	Data Cálculo	15/06/2011
Data Medição	15/06/1995		
Data Cálculo	23/11/2004		
Sigma Latitude(m)	0,002		
Sigma Longitude(m)	0,002		
Sigma Altitude Geométrica(m)	0,013		
UTM(N)	9.394.305,367		
UTM(E)	224.697,397		
MC	-45		

Figura 7 – Relatório da estação 92166.

IBGE		Relatório de Estação Geodésica	
Estação :	92828	Nome da Estação :	92828
Município :	NOVA OLINDA		
Última Visita :	16/07/2010	Situação Marco Principal :	Bom
Conexões :	EG : 8095498 RN : 687B		
DADOS PLANIALTIMÉTRICOS		DADOS ALTIMÉTRICOS	
Latitude	07° 33' 00,9610" S	Altitude Ortométrica(m)	268,1823
Longitude	48° 24' 59,1727" W	Fonte	Nivelamento Geométrico
Altitude Geométrica(m)	245,422	Sigma Altitude(m)	0,09
Fonte	GPS Geodésico	Datum	Imbituba
Origem	Ajustada	Data Medição	19/11/1970
Datum	SIRGAS2000	Data Cálculo	15/06/2011
Data Medição	06/07/2009		
Data Cálculo	02/10/2009		
Sigma Latitude(m)	0,003		
Sigma Longitude(m)	0,003		
Sigma Altitude Geométrica(m)	0,016		
UTM(N)	9.164.575,272		
UTM(E)	785.103,773		
MC	-51		

Figura 8 – Relatório da estação 92828.

A partir dos dados constantes nos relatórios das três estações geodésicas citadas e com o auxílio dos softwares MAPGEO2015 e Datageosis foi possível calcular:

- i) A ondulação geoidal real nas três estações;
- ii) A ondulação geoidal do modelo geoidal nas três estações;
- iii) A variação da ondulação geoidal real e do modelo nos dois alinhamentos; e,
- iv) A distância elipsoidal dos dois alinhamentos.

A estimativa do erro relativo máximo do modelo foi realizada individualmente para cada alinhamento procedendo-se da seguinte forma:

$$\sigma_N = \pm \left(\frac{\Delta N - \Delta n}{D} \right) \quad (11)$$

Em suma, a metodologia para estimativa da precisão relativa do modelo geoidal brasileiro aqui proposta consiste numa aplicação reversa do próprio método relativo de conversão de altitudes, sendo conhecidas previamente as altitudes geométricas e ortométrica dos dois pontos, suas respectivas precisões e as distâncias entre eles, restando tão somente a precisão relativa.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para os dois alinhamentos considerados neste trabalho, a aplicação da metodologia aqui proposta conduziu aos seguintes resultados:

Tabela 1 – Resultados da estimativa da precisão relativa do MAPGEO2015.

Alinhamento	90448-92828	90448-92166
De	151,158552km	276,729974km
ΔN	1,1848m	3,5291m
Δn	0,45m	2,64m
Variação relativa	0,7348m	0,8891m
Erro relativo	4,9mm/km	3,2mm/km

Observando a Figura 4, aparentemente a maior variação relativa ocorreria no alinhamento 90448-92166, dada a diferença de coloração do verde para o laranja ser mais intensa. Entretanto, os resultados mostraram que apesar da variação relativa entre os valores do modelo e real na ondulação geoidal realmente ser maior nesse alinhamento (0,8891m) a distância maior acabou diluindo o valor final do erro relativo (3,2mm/km). Por outro lado, o alinhamento 90448-92828 apresentou valor inferior na variação relativa (0,7348m) em comparação com o anterior, porém numa distância mais curta, o que resultou num valor pior de erro relativo (4,9mm/km).

Este é exatamente o sentido da precisão relativa que está ausente no MAPGEO2015, e para a qual propomos este estudo preliminar a fim de estimar o seu valor, que é fornecer uma medida de confiança para que o método relativo possa ser aplicado quando se necessite da conversão de altitudes, de forma que quanto mais distante os pontos estejam entre si proporcionalmente pior seja o resultado da precisão alcançada.

De forma análoga ao aplicado pelo IBGE na avaliação da precisão absoluta do MAPGEO2015, quando os valores máximos da validação ficaram situados entre $\pm 0,49m$ e a precisão foi indicada como sendo de $\pm 0,17m$, para o erro relativo estimado do MAPGEO2015 propõe-se adotar um valor três vezes menor que o pior deles, supondo pela análise visual que todas as discrepâncias no território nacional se situarão num intervalo de até três vezes a precisão.

Entre os dois resultados alcançados nos alinhamentos tomados, escolher-se-ia o pior deles, ou seja, 4,9mm/km como sendo o valor da estimativa do pior erro relativo do MAPGEO2015, portanto, com precisão relativa de 1,6mm/km (**2mm/km**, arredondando-se), para, a partir daí, generalizar-se sobre todo o modelo e permitir a aplicação do método relativo de conversão de altitudes com melhores resultados.

4 CONCLUSÕES

A escolha do método de conversão de altitudes deve levar em consideração uma comparação entre os resultados apresentados para a precisão nos dois métodos. Conforme o MAPGEO2015 apresenta-se atualmente, tendo divulgado apenas o valor da precisão absoluta, torna-se inviável tal comparação.

Adotando os valores defasados do MAPGEO2004 de $\pm 10\text{mm/km}$ ao modelo MAPGEO2015, chega-se de maneira grosseira e desconsiderando as precisões das grandezas envolvidas nas equações a um parâmetro de aproximadamente 17km de distância entre a RN e o ponto P a fim de que o método absoluto passe a ser vantajoso.

Com a adoção da estimativa apresentada neste estudo de 2mm/km, essa distância aumenta cinco vezes e vai à ordem de 85km entre a RN e o ponto P para que o método absoluto apresente vantagem na precisão da conversão de altitude. Abaixo do limite de 34km, aproximadamente, o método relativo continua vantajoso por oferecer melhores resultados.

Obviamente, a metodologia e resultados apresentados são preliminares e consideraram uma análise visual sobre o mapa das discrepâncias divulgado no MAPGEO2015. Melhores resultados podem ser alcançados se se conseguir acesso aos dados utilizados pelo IBGE em todas as 592 estações geodésicas que foram utilizadas na validação do modelo, promovendo-se um estudo ampliado que possibilitaria a identificação de possíveis ocorrências de piores resultados para a variação relativa que não foram percebidas na análise deste estudo. De qualquer forma, este estudo teve por objetivo enfatizar o problema e propor investigações preliminares sobre a sua solução, visando contribuições ao novo modelo geoidal do Brasil tanto do ponto de vista teórico quanto do ponto de vista prático.

REFERÊNCIAS

FRANÇA, R.M.; BOSCATTO, F.; ARAÚJO, A.L. **Apostila Geodésia**. Florianópolis: IFSC, 2016. 52p. Publicação eletrônica disponível em: < http://sites.florianopolis.ifsc.edu.br/agrimensura/files/2016/06/GEODESIA_APOSTILA.pdf>. Acesso em 15 junho 2016.

GEMAEL, C. **Introdução ao ajustamento de observações: aplicações geodésicas**. Curitiba: Editora da UFPR, 1994. 319p.

IBGE. **O novo modelo de ondulação geoidal do Brasil - MAPGEO2015**. Publicação eletrônica disponível em: <ftp://geoftp.ibge.gov.br/modelos_digitais_de_superficie/modelo_de_ondulacao_geoidal/cartograma/rel_mapgeo2015.pdf>. Acesso: 15 junho 2016.

WELLENHOF, B. H. MORITZ, H. **Physical Geodesy**. Wien: Springer Wien New York, 2005. p171-172.

SANTOS, M. C. **Tendências modernas e questões relacionadas com a definição e realização de sistemas verticais: a experiência canadense**. Revista Brasileira de Cartografia, v. 67, n. 8, p. 1627-1639, 2015.

SEVERO, T. C.; SOUZA, S. F.; MATSUOKA, M. T.; GEHLEN, A. K. **Estudo das correções gravimétricas para altitudes físicas aplicadas aos desníveis da RAAP**. Boletim de Ciências Geodésicas, v. 19, p. 472-497, 2013.